

әл - Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
Математика және Математикалық моделдеу институты

ӘОЖ 519.87(043)

Қолжазба құқығында

КОШКАРБАЕВ НУРБОЛ МАХСЕТБАЕВИЧ

Су толқындарын аналитикалық және сандық моделдеу

6D070500-Математикалық және компьютерлік моделдеу

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
PhD, қауымдастырылған профессор
Төребек Б.Т.
Шетелдік ғылыми кеңесші
PhD, профессор
С.Л. Гаврилюк (Марсель, Франция)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ.....	4
1 ТАЯЗ СУДАҒЫ СЫНҒАН ТОЛҚЫНДАРДЫҢ БІР МОДЕЛІ ТУРАЛЫ.....	9
1.1 Сүзгілеу арқылы алынған сақталу теңдеулері.....	9
1.2 Сақталу теңдеулерін орташалау.....	13
1.2.1 Басқару теңдеулері	13
1.2.2 Өлшемсіз айнымалыларды енгізу.....	15
1.2.3 Орташаландыру процедурасы	18
1.2.4 Энстрофия теңдеуі	22
1.3 Диссипация және құйын тұтқырлығы.....	23
1.4 Жылжымалы бұзылатын толқындар.....	24
1.4.1 Есептің қойылуы.....	25
1.4.2 Ляпунов функциясы.....	29
1.4.3 Жылжымалы толқын түріндегі шешімдерінің бар болуы	30
2 ШЕКАРАСЫ ЖЫЛЖЫМАЛЫ ОБЛЫСТАҒЫ СУ ТОЛҚЫНДАРЫ: КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕҢДЕУІ.....	37
2.1 Негізгі ұғымдар, теория және әдістер	37
2.1.1 Галеркиннің ақырлы элементтер әдісі	37
2.1.2. В-сплайн базистік функциялары туралы қысқаша шолу.....	39
2.1.3 Ақырлы айырым әдісі.....	47
2.1.4 Кранк Николсон әдісі	48
2.2 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег-де Фриз теңдеуі.....	49
2.2.1 Есепті цилиндрлік облысқа көшіру	50
2.2.2 Өлсіз шешімнің бар және жалғыз болуы	52
2.3 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег-де Фриз теңдеуінің сандық шешімдері	61
2.3.1 Уақыт бойынша дискретизация.....	63
2.3.2 В-сплайндармен жуықтау	64
2.3.3 Сандық шешім	65
3 ШЕКАРАСЫ ЖЫЛЖЫМАЛЫ ОБЛЫСТАҒЫ СУ ТОЛҚЫНДАРЫ: КАВАХАРА ТЕҢДЕУІ.....	74
3.1 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кавахара теңдеуі.....	74
3.1.1 Есепті цилиндрлік облысқа көшіру	76
3.1.2 Біртекті шекаралық есепке келтіру және регуляризациялау.....	77
3.1.3 Априорлық бағалаулар	79
3.1.4 Есептің шешімінің бар болуы және жалғыздығы	89
3.1.5 Есептің шешімінің тұрақтылығы.....	91
3.2 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кавахара теңдеуінің сандық шешімдері	94
3.2.1 Галеркин әдісі негізіндегі жуық шешім	96
3.2.2 Уақыт бойынша дискретизация.....	97
3.2.3 В-сплайндармен жуықтау	98

3.2.4 Сандық шешім	99
ҚОРЫТЫНДЫ.....	107
ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	108

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Бұл диссертациялық жұмыс [1,2] еңбектерінде ұсынылған теңіз жағалауындағы толқындардың бейсызықты табиғатын сипаттайтын математикалық моделді зерттеуге арналған. Зерттеу барысында сол моделдің жылжымалы толқындар шешімдері қарастырылды. Нақтырақ айтқанда, турбуленттілік пен әртүрлі бұзылулардың әсеріне ұшырайтын жағалау толқындарының таралу заңдылықтары талданды. Аталған моделдегі теңдеулер масса, импульс және кинетикалық энергия теңдеулерін тереңдік бойынша орташа алу әдісі арқылы алынды. Сонымен бірге, су толқындарының динамикасын шекарасы жылжымалы облыста сипаттау мақсатында Кавахара теңдеуі мен Кордег-де Фриз теңдеуі зерттелді. Нәтижесінде, шекарасы жылжымалы облыста Кортевег-де Фриз теңдеуі үшін сандық шешім алынды. Сонымен қатар, осы облыста Кавахара теңдеуінің глобалды шешімі бар екені және оның жалғыздығы дәлелденіп, сандық шешімі анықталды.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Беттік тартылыс толқындарының теориясы гидродинамиканың классикалық салаларының бірі болып саналады [3-6]. Алайда толқын сынуын моделдеу әлі де күрделі мәселе болып табылады [7-9]. Толқынның сынуын есептеу үшін [10] жұмысында толқындардың бейсызықты таяз су теңдеулерінің консервативті түрде сандық шешіміне негізделген озық әдіс ұсынды. Бұл әдіс физикалық шынайы нәтижелер бергенімен, [11] еңбегі оның толқынның жағаға көтерілу фазасында сенімділігі төмен екенін көрсетті. Сонымен қатар, толқынның сынуынан кейінгі энергияның көп мөлшері тарап диссипацияланатынын да ескеру маңызды. Осыған байланысты, [12] жұмысында қарастырылған алгоритмнің кейінгі нұсқаларында толқын амплитудасын дәлірек сипаттау үшін тұтқырлық пен үйкеліс сияқты жасанды диссипациялық мүшелер қосылды. Осындай жасанды мүшелерді енгізудің орнына, осы диссертацияда қарастырылатын модел толқынның сыну құбылысын [13-15] еңбектеріне сүйене отырып, физикалық негізі бар жаңа айнымалы – энстрофияны (құйындылық квадраты) енгізу арқылы сипаттайды. Алайда, жоғарыда аталған жұмыстардан айырмашылығы, энстрофияның түзілуі соққы толқынының қалыптасуымен емес, турбуленттік диссипациямен байланысты.

Су толқындарының динамикасын шекарасы жылжымалы ортада сипаттау қазіргі кезде қолданбалы математика, физика және теңіз инженериясы салаларындағы өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Жағалау сызығының өзгеруі, гидротехникалық құрылыстардың әсері немесе басқа да табиғи және техногендік факторлар нәтижесінде шекараның орын ауыстыруы толқындардың таралу қасиеттерін күрделендіреді. Шекарасы жылжымалы бар есептер көптеген ғылыми салаларда кездескенімен, олардың маңызы толқындық процестерді моделдеуде ерекше. Бұл салада бейсызық және дисперсиялық эффекттерді сипаттайтын Кортевег-де Фриз және Кавахара теңдеулері іргелі құрал болып табылады. Олар, мысалы, таяз судағы гравитациялық толқындардың (цунами,

каналдағы толқындар) таралуын, плазмадағы ионды-дыбыстық толқындарды және бейсызық оптикадағы процестерді моделдеу үшін кеңінен қолданылады. Мұндай зерттеулер теңіз жағалауын қорғау, навигациялық қауіпсіздік пен энергетикалық құрылғыларды жобалау барысында маңызды практикалық нәтижелерге қол жеткізуге септігін тигізеді. Сондықтан Кавахара және Кордевег-де Фриз теңдеулерін шекарасы жылжымалы ортаға бейімдеп зерттеу – су толқындарының күрделі табиғатын түсінуге, олардың мінез-құлқын болжауға және басқаруға бағытталған өзекті ғылыми бағыттардың бірі.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты таяз суда толқындардың сыну құбылыстарын моделдеу кезінде жылжымалы толқын түріндегі аналитикалық және сандық шешімдерін зерттеу.

Сонымен қатар шекарасы жылжымалы облыстағы су толқындарының таралу заңдылықтарын талдап, оларды сипаттау үшін қолданылатын Кортевег-де Фриз және Кавахара теңдеулерінің аналитикалық және сандық шешімдерін табу тәсілдерін зерттеу болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың мақсатына жету үшін келесі негізгі есептерді шешу қарастырылған:

- Таяз суда толқындардың сыну құбылыстарын моделдеу кезінде жылжымалы толқын түріндегі аналитикалық және сандық шешімді табу;
- Шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег-де Фриз теңдеуінің сандық шешімін табу;
- Шекарасы жылжымалы облыстағы Кавахара теңдеуінің глобал шешімінің бар болуын зерттеу;
- Шекарасы жылжымалы облыстағы Кавахара теңдеуінің сандық шешімін табу.

Зерттеу объектісі. Теңіз жағалауындағы толқындардың бейсызықты математикалық моделі. Сонымен қатар шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег-де Фриз теңдеуі мен Кавахара теңдеуі.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыстың есептерін шешу кезінде дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, функционалды талдау және бейсызықты анализ теориясының әртүрлі әдістері қолданылды. Атап айтқанда

Глобал шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін:

- Теңдеулерді әлсіз тұжырымдамада жазу;
- Галеркин әдісі;
- Априорлық бағалар алу;
- Жуықтау шешімдерінің әлсіз шектеулі тізбегінің жинақталуы;
- Глобал шешімді барлық уақыт аралығына дейін жалғастыруға

болатынын дәлелдеу.

Сандық шешімді зерттеу үшін:

- Галеркин әдісі;
- Ақырлы айырым әдісі;
- Ақырлы элемент әдісі.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл диссертациялық жұмыста зерттелген теңіз жағалауындағы толқындардың бейсызықты моделі және шекарасы жылжымалы облыстағы Кордевег де-Фриз және Кавахара теңдеулерінің аналитикалық және сандық шешімдерін зерттеу жаңа мәселелер болып табылады. Қарастырылып отырған мәселелер негізінен зерттелінбеген немесе дербес жағдайлары үшін ғана көрсетілген. Сондықтан, зерттеу жұмысы бұрыннан белгілі нәтижелерді кеңейтуді және жаңа нәтижелерді алуды көздейді.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы. Зерттеу тақырыбы негізінен теориялық және фундаменталды болып табылады, олардың ғылыми маңыздылығы гидродинамика және математикалық физика теориясының терең, заманауи нәтижелерін қолдану және зерттеу мен талдаудың жаңа өзіндік әдістерін құрумен байланысты.

Бұл жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.

Диссертациялық жұмыс «Жылжымалы шекаралық шарттар қатысқан бесінші ретті бейсызықты дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық және сандық шешімдері» (AP22686595, 2024-2026) тақырыбындағы ҚР БҒМ жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулерді гранттық қаржыландыру жобасы шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Ғылыми кеңесшілер есептің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға өз үлестерін қосты.

Диссертацияның сынақтан өтуі мен талқылануы

Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер: «Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day» атты конференциясында (Алматы, 2019), Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова. "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД (Новосибирск, 2019), «Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day» атты конференциясында (Алматы, 2022), the IX International Conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies – Al-Khorezmiy атты конференциясында (Uzbekistan, 2024), International Conference “International conference Actual problems of Analysis, Differential equations and Algebra” конференциясында (Астана, 2025), ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кальменов, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі, ф. - м. ғ. д., профессор М. А. Садыбеков, ф.-м. ғ. д., профессор Б. Е. Кангужин жетекшілігімен, әл-Фараби атындығы ҚазҰУ механика-математика факультетінің «Дифференциалдық операторлар және олардың қолданыстары» қалалық ғылыми-зерттеу семинарында баяндалып талқыланды.

Диссертация тақырыбы бойынша 7 жұмыс, соның ішінде 2 жарияланым Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда, 3 жарияланым ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы

бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда, 2 жарияланым халықаралық ғылыми конференция материалдарында жарияланды.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен сипаттамасы.

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 3 тараудан, қорытынды және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі - 112 бет. Әдебиеттер саны - 62.

Бірінші тарауда таяз судағы сынған толқындардың моделінің келесі жүйесін қарастырамыз

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{gh^2}{2} + h^3\varphi + \frac{h^2\ddot{h}}{3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{\text{Re}} h^3 \sqrt{\varphi} \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h\varphi}{\partial t} + \frac{\partial hU\varphi}{\partial x} = \frac{8h\sqrt{\varphi}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - C_r h\varphi^{3/2}, \end{cases} \quad (0.1)$$

мұндағы h - судың тереңдігі, U - тереңдіктің орташаланған көлденең жылдамдығы, g - ауырлық тұрақтысы және φ - энстрофия айнымалысы. Жүйе екі параметрге байланысты: Re - Рейнольдс саны және C_r - турбуленттілік диссипация параметрі. (0.1) жүйеде бірінші теңдеу - массаның сақталуы, екіншісі - импульстің сақталуы, ал үшіншісі - энстрофия теңдеуі. Осы жүйенің жылжымалы толқын түріндегі шешімін табу, сол шешімнің бар болуын дәлелдеу және Re_{cr} критикалық мәнін анықтап, оның физикалық-инженерлік салдарын негіздеу зерттеледі.

Екінші тарауда біз классикалық Кортевег-де Фриз теңдеуіне негізделген төмендегі бейсызықты бастапқы-шекаралық есепті қарастырамыз

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} = 0, & (\xi, \tau) \in Q_\tau, \\ \mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) = \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = 0, \\ \mathcal{G}_\xi(\beta(\tau), \tau) = 0, & \tau \in [0, T], \\ \mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), & \xi \in D_0, \end{cases} \quad (0.2)$$

мұндағы $Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$ шекарасы жылжымалы облыс және шекарасы $D_\tau = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), \tau > 0\}$. (0.2) жүйесінің шешімінің бар болуын дәлелдеу және оның сандық шешімін табу зерттеледі.

Үшінші тарауда біз классикалық Кавахара теңдеуіне негізделген төмендегі бейсызықты бастапқы-шекаралық есепті қарастырамыз

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}\mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} - \mathcal{G}_{\xi\xi\xi\xi} = 0, & (\xi, \tau) \in Q_\tau, \\ \mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) = \phi_1, & \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = \phi_2, \\ \mathcal{G}_\xi(\alpha(\tau), \tau) = \phi_3, & \mathcal{G}_\xi(\beta(\tau), \tau) = \phi_4, \\ \mathcal{G}_{\xi\xi}(\beta(\tau), \tau) = \phi_5, & \tau \in [0, T], \\ \mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), & \xi \in D_0. \end{cases} \quad (0.3)$$

(0.3) жүйесінің шешімінің бар болуын дәлелдеу және (0.3) жүйесінің біртекті шекаралық шарттармен берілген есептің сандық шешімін табу зерттеледі.

1 ТАЯЗ СУДАҒЫ СЫНҒАН ТОЛҚЫНДАРДЫҢ БІР МОДЕЛІ ТУРАЛЫ

Жағалау толқындарының таралуы мен олардың жағалаудағы құрылымдарға әсерін зерттеу көптеген ғылыми және инженерлік қолданбалар үшін маңызды мәселе болып табылады. Әсіресе, турбуленттік әсерлер мен толқындардың бұзылуын ескере отырып, толқындық үдерістерді сипаттау күрделі математикалық моделдерді қажет етеді. Бұл тарауда таяз судағы сынған толқындардың моделдері үшін қолданылатын негізгі теориялық тәсілдерге, соның ішінде классикалық және заманауи әдістерге шолу жасалады.

Толқындық құбылыстарды сипаттау үшін қолданылатын математикалық моделдер толқындардың таралуын, шағылуын, сынуын және диссипациясын ескеруі қажет. Әсіресе, таяз сулы аймақтарда толқындардың күрделі динамикасын сипаттау үшін бейсызықты және дисперсиялық әсерлерді ескеретін теңдеулер жүйесі маңызды рөл атқарады. Соңғы жылдары сандық моделдеудің дамуы жағалау толқындарын зерттеуде жаңа мүмкіндіктер ашты. Бұл су асты бедерінің, ағыстардың және турбуленттік құбылыстардың әсерін дәлірек талдауға мүмкіндік береді.

Осы тарауда толқындардың таралуын сипаттайтын негізгі теңдеулерді шешу әдістері қарастырылады. Сонымен қатар, жағалаудағы толқын динамикасын сипаттау үшін қолданылатын сандық моделдеу тәсілдері талқыланып, олардың тиімділігі сараланады.

Беттік гравитациялық толқындар гидродинамикадағы маңызды құбылыстардың бірі болып табылады [3-6]. Алайда, толқындардың сыну механизмін нақты моделдеу әлі күнге дейін өзекті әрі күрделі мәселе болып саналады [7-9]. Бұл тарауда біз [1,2] зерттеулерінде ұсынылған таяз судағы сынған толқындардың моделін қарастырамыз. Бұл модель толқындардың массалық, импульстік және кинетикалық энергия теңдеулерін тереңдік бойынша орташа алу әдісі арқылы тұжырымдалады. Ол екі негізгі эмпирикалық параметрді қамтиды: біріншісі - турбуленттік диссипацияның деңгейін реттейді, ал екіншісі - құйынды тұтқырлықты сипаттап, турбуленттік Рейнольдс санына тәуелді анықталады. Біз осы модел негізінде жылжымалы толқындардың шешімдерін талдап, олардың аналитикалық және сандық шешімдерін қарастырамыз.

1.1 Сүзгілеу арқылы алынған сақталу теңдеулері

Бұл бөлімде [1] және [2] жұмыстарында ұсынылған таяз судағы сынған толқындардың моделін қорытып шығарамыз.

Біз таяз су аймағынан жағалау сызығына дейінгі жағалау толқындарының таралуын зерттейміз. Ағын, әсіресе толқынның бұзылу аймағында және одан кейінгі жағаға соғылу аймағында жоғары дәрежеде турбулентті болуы мүмкін. Сондықтан толқындардың бұзылуындағы маңызды физикалық ерекшеліктерді дұрыс сипаттау үшін сәйкес турбуленттік модел қажет.

Турбуленттілікті классикалық тұрғыда сипаттау Рейнольдс жіктемесіне негізделген. Жылдамдық өрісі орташа жылдамдық пен турбуленттік

флуктуацияның қосындысы түрінде өрнектеледі. Турбуленттік үдерістер, әдетте, орташа ағыннан энергияны алып, оны флуктуациялық жылдамдық өрісіне береді. Бұл энергия алмасу өндіріс деп аталады, өйткені көп жағдайда ол орташа кинетикалық энергияның жоғалуына және турбуленттік кинетикалық энергияның пайда болуына әкеледі.

Турбуленттік қозғалыстардың өлшемдері ағынның сипаттамалық ұзындық шкалаларына сәйкес келетін ірі масштабтардан бастап, өте ұсақ масштабтарға дейін өзгереді. Энергия каскады гипотезасына (Ричардсон, 1922) және Колмогоров гипотезасына (Колмогоров, 1941) сәйкес, өндіріс алдымен энергияны ірі масштабты қозғалыстарға береді. Кейін бұл энергия біртіндеп ұсақ және одан да ұсақ масштабтарға беріледі, ақырында Колмогоров шкалаларында тұтқырлық әсерінен диссипацияланады.

Ірі масштабтар энергияның басым бөлігін қамтитындықтан, олар энергия қамтушы диапазон деп аталады. Ал ұсақ масштабтарда энергия толығымен тұтқырлық әсерінен жойылатындықтан, бұл аймақ диссипациялық диапазон деп аталады. Осы екі диапазонның арасында, Рейнольдс саны жеткілікті жоғары болған жағдайда, инерциялық ішкі диапазон орналасады. Мұнда ұзындық шкалалары тұтқырлық әсері елеусіз болатындай үлкен, бірақ ағынның жалпы ұзындық шкалаларымен салыстырғанда жеткілікті түрде кіші, сондықтан бұл аймақта энергия өндірісі іс жүзінде болмайды.

Инерциялық ішкі диапазонда энергия тұтқырлық әсерсіз процестер арқылы ұсақ масштабтарға беріледі. Колмогоров гипотезасына сәйкес турбуленттік қозғалыстардың тағы бір ерекшелігі – ірі құйындардың анизотропты, ал ұсақ құйындардың изотропты болуы.

Біз үлкен құйындар әдісіне (Large-Eddy Simulation, LES) ұқсас тәсілді қолданамыз. Жылдамдық өрісі v сүзгіден өтеді, оны сүзгіден өткен жылдамдық өрісі $\bar{v}$ және қалдық жылдамдық өрісі v' ретінде жіктейміз

$$v = \bar{v} + v'. \quad (1.1.1)$$

Рейнольдс жіктемесі мен бұл сүзгілеу әдісі арасындағы айырмашылық – Рейнольдс әдісі жылдамдық өрісін турбулентті емес өріс пен турбуленттік компонентке жіктесе, ал сүзгілеу әдісінде сүзгіленген жылдамдық өрісі ірі масштабты турбуленттілікті қамтиды, ал қалдық жылдамдық өрісі ұсақ масштабты турбуленттілікті сипаттайды. Идеалды жағдайда сүзгілеу әдісі төмен жиілікті өткізетін сүзгі ретінде әрекет етеді және инерциялық ішкі диапазондағы белгілі бір ұзындық шкаласынан үлкен турбуленттік қозғалыстарды сипаттауға мүмкіндік береді. Осыған байланысты анизотропты энергия қамтушы диапазон сүзгіленген өрісте қалады, ал изотропты диссипациялық диапазон қалдық өрісте сақталады. Рейнольдс жіктемесімен тағы бір айырмашылығы – жалпы жағдайда, сүзгіленген қалдық жылдамдық нөлге тең емес, яғни $\overline{v'} \neq 0$. Дегенмен, егер сүзгі өткір спектралдық сүзгі сияқты проектор болса, онда $\bar{\bar{v}} = \bar{v}$ және $\overline{v'} = 0$ болады (бұл әдіс туралы толық ақпарат алу үшін [10] еңбегін қараңыз).

Сүзгілеу әдісі тығыздығы ρ және кинематикалық тұтқырлығы ν болатын сығылмайтын сұйықтықтың Навье-Стокс теңдеулеріне қолданылады. Сүзгінің біртекті жағдайы қарастырылады.

Сүзгіленген үзіліссіздік теңдеуі

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (1.1.2)$$

түрде беріледі. Осыдан сүзгіленген импульс теңдеуі

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \otimes \bar{v}) = g - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \bar{p} + \nu \Delta \bar{v} \quad (1.1.3)$$

арқылы өрнектеледі. Мұндағы $\bar{p}$ – сүзгіленген қысым, ал $\otimes$ – тензорлық көбейтінді.

Қалдық кинетикалық энергия

$$k^r = -\frac{\operatorname{tr} \sigma^r}{2\rho}, \quad (1.1.4)$$

мұндағы қалдық кернеу тензоры

$$\sigma^r = -\rho(\bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{v} \otimes \bar{v}) \quad (1.1.5)$$

теңдігімен анықталады.

Қалдық кернеу тензоры изотропты және девиаторлы анизотропты бөліктерге жіктеледі

$$\sigma^r = -\frac{2}{3} \rho k^r I + A^r, \quad (1.1.6)$$

мұндағы I – бірлік тензор, ал A^r – девиаторлы анизотропты бөлік. Бұл жіктелу ұсақ масштабты турбуленттік кернеулердің изотропты және анизотропты компоненттерін жеке қарастыруға мүмкіндік береді. Қалдық кернеу тензоры турбуленттік тұтқырлық гипотезасы негізінде моделденеді. Бұл кеңінен қолданылатын гипотеза моделде энергияның кері таралуы болмайтынын, яғни энергия тек ірі масштабтардан ұсақ масштабтарға берілетінін болжайды.

Сүзгіленген деформация жылдамдығының тензоры D келесі түрде

$$\bar{D} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \bar{v} - (\operatorname{grad} \bar{v})^T] \quad (1.1.7)$$

ал, анизотропты қалдық кернеу тензоры

$$A^r = 2\rho\nu_T \bar{D} \quad (1.1.8)$$

өрнектерімен беріледі. Мұндағы ν_T – турбуленттік тұтқырлық, ал қалдық кернеу тензорының изотропты бөлігі модификацияланған қысымға енгізіледі, сәйкесінше жазбаларды ықшамдау үшін жай ғана p деп белгілейміз

$$p = \bar{p} + \frac{2}{3}\rho k^r. \quad (1.1.9)$$

Осылайша сүзгіленген импульс теңдеуі

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{div}(\bar{v} \otimes \bar{v}) = g - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{div}(2\nu_T \bar{D}) + \nu \Delta \bar{v} \quad (1.1.10)$$

және сүзгіленген меншікті кинетикалық энергия

$$\bar{e}_k = \frac{1}{2} \overline{v \cdot v} \quad (1.1.11)$$

теңдіктерімен анықталады. Онда (1.1.5)-ге сәйкес

$$\bar{e}_k = e_f + k^r, \quad (1.1.12)$$

мұндағы e_f -сүзгіленген жылдамдық өрісінің кинетикалық энергиясы

$$e_f = \frac{1}{2} \bar{v} \cdot \bar{v} \quad (1.1.13)$$

қатынасы орындалады.

Гравитациялық өрісті градиент арқылы өрнектеп және $g = -\text{grad } e_p$ деп белгілесек, онда сүзгіленген кинетикалық энергия e_f

$$\frac{\partial e_f}{\partial t} + \text{div} \left(e_f \bar{v} + \frac{p \bar{v}}{\rho} - \frac{\bar{v} \cdot A^r}{\rho} - 2\nu \bar{v} \cdot \bar{D} + e_p \bar{v} \right) = -\varepsilon_f - P^r \quad (1.1.14)$$

теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы $\varepsilon_f = 2\nu \bar{D} : D$ тұтқырлық әсерінен болатын диссипацияны білдіреді, ал $P^r = 2\nu_T \bar{D} : D$ турбуленттік энергия өндірісін сипаттайды. Мұндағы "·" мен ":" сәйкесінше скалярлық көбейтінді мен қос нүктелік көбейтіндіні білдіреді. Рейнольдс сандарының өте үлкен мәндері үшін молекулалық тұтқырлыққа байланысты мүшелерді елемеуге болады. Бұл, әсіресе, сүзгіленген жылдамдық өрісінің тұтқырлық диссипациясын

сипаттайтын ε_f мүшесіне қатысты. Себебі, тұтқырлық әсерінен болатын диссипацияның негізгі бөлігі диссипациялық диапазонда орын алады. Сүзгіленген кинетикалық энергия теңдеуіндегі басым диссипативті мүше P^r ол энергияның сүзгіленген қозғалыстардан (ірі масштабтардан) қалдық қозғалыстарға (ұсақ масштабтарға) берілуін сипаттайды. Көптеген энергия энергия қамтушы диапазонда жинақталатындықтан, орташа кинетикалық энергия $\langle e \rangle$ шамамен сүзгіленген жылдамдық өрісінің орташа кинетикалық энергиясына $\langle e_f \rangle$ тең болады (мұнда $\langle \cdot \rangle$ Рейнольдс орташа алу амалын білдіреді). Рейнольдс сандарының үлкен мәндері жағдайында орташа ағыннан болатын диссипация жеткіліксіз болады, сондықтан орташа кинетикалық энергияның диссипациясы негізінен турбуленттік кинетикалық энергияның диссипациясына байланысты. Бұл диссипация әдетте ε деп белгіленеді. Осылайша, сүзгіленген кинетикалық энергияның орташа диссипациясы $\langle P^r \rangle$ шамамен толық диссипацияға тең болады

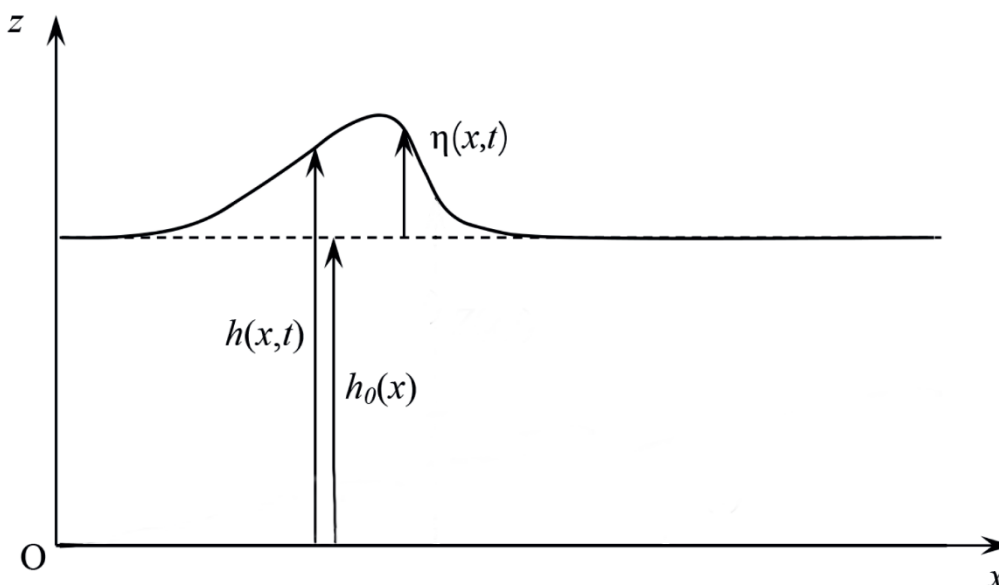
$$\langle P^r \rangle \approx \varepsilon. \quad (1.1.15)$$

Бұл теңдік [17] және кейінірек [16,18] еңбектерінде қарастырылған. Ол энергияның ірі масштабтардан ұсақ масштабтарға берілуінің орныққан жағдайын сипаттайды, яғни турбуленттік тұтқырлық арқылы энергияның таралуы және оның тұтқырлық әсерінен диссипациясы тепе-теңдікке жетеді.

1.2 Сақталу теңдеулерін орташалау

1.2.1 Басқару теңдеулері

Бұл бөлімде екі өлшемді ағынның жалпы жағдайын қарастырамыз. Бұл жағдайда қолданылатын белгілер 1.2.1-суретте көрсетілген.



1.2.1 сурет. Екі өлшемді ағын

Жылдамдық өрісінің компоненттері:

- u – горизонтал бағыттағы жылдамдық (Ox бойымен),
- w – вертикал бағыттағы жылдамдық (Oz бойымен).

$h(x,t)$ – су тереңдігі, $h_0(x)$ – бастапқы тыныш күйдегі су тереңдігі және $\eta(x,t)$ – су бетінің ауытқуы. Жалғыз толқын жағдайында толқынның амплитудасы a биіктіктің максималды мәні ретінде анықталады, яғни $a = \eta_{\max}(x,t)$.

Сүзгіленген басқарушы теңдеулер.

1. Масса сақталу теңдеуі (үздіксіздік теңдеуі):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0. \quad (1.2.1)$$

2. Импульстің сақталу теңдеулері

Ox бағытындағы импульс теңдеуі:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_{xx}^r}{\partial x} + \frac{\partial A_{xz}^r}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right). \quad (1.2.2)$$

Oz бағытындағы импульс теңдеуі:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_{xz}^r}{\partial x} + \frac{\partial A_{zz}^r}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right). \quad (1.2.3)$$

Сүзгіленген кинетикалық энергияның сақталу теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{w}^2}{2} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{u} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{w}^2}{2} + gz \right) + \frac{pu}{\rho} - \frac{A_{xx}^r u}{\rho} - \frac{A_{xz}^r w}{\rho} - \frac{\tau_{xx} u}{\rho} - \frac{\tau_{xz} w}{\rho} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{w} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{w}^2}{2} + gz \right) + \frac{pw}{\rho} - \frac{A_{xz}^r u}{\rho} - \frac{A_{zz}^r w}{\rho} - \frac{\tau_{xz} u}{\rho} - \frac{\tau_{zz} w}{\rho} \right] = \\
& = -\varepsilon_f - P^r.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Осы теңдеуде сүзгіленген тұтқыр кернеу тензоры келесідей анықталады $\tau = 2\rho\nu\bar{D}$.
Қарастырылып отырған симметриялы тензорлардың компоненттері

$$A^r = A_{xx}^r e_x \otimes e_x + A_{xz}^r e_x \otimes e_z + A_{zx}^r e_z \otimes e_x + A_{zz}^r e_z \otimes e_z$$

және $\tau = \tau_{xx} e_x \otimes e_x + \tau_{xz} e_x \otimes e_z + \tau_{zx} e_z \otimes e_x + \tau_{zz} e_z \otimes e_z$ түрінде анықталады, мұндағы e_x және e_z сәйкесінше Ox осі және Oz бағытындағы бірлік векторлар арқылы өрнектеледі.

Шекаралық шарттар:

1. Еркін беттегі кинематикалық шекаралық шарт

$$w(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1.2.5}$$

Бұл шарт еркін беттегі сұйық бөлшектерінің жылдамдығы сол бетпен бірге өзгеретінін сипаттайды.

2. Еркін беттегі динамикалық шекаралық шарт

$$(\sigma \cdot n)(h) = 0 \tag{1.2.6}$$

мұндағы $\sigma = -pI + A^r + \tau$ Коши кернеу тензоры және n – еркін беттік бірлік нормал векторы.

1.2.2 Өлшемсіз айнымалыларды енгізу

Модел таяз су жуықтауы шеңберінде алынды. Егер h_0 - тынық су тереңдігінің сипаттамалық мәні, ал L - ағын параметрлерінің горизонтал бағытта өзгеруінің сипаттамалық ұзындығы болса, онда шағын параметр келесідей анықталады

$$\mu = \frac{h_0^*}{L} \ll 1. \tag{1.2.7}$$

Енді теңдеулерді өлшемсіз түрге келтірейік. Өлшемсіз шамалар тильда ($\sim$) белгісімен белгіленеді. Бұл жағдай үшін [19] еңбегіндегі классикалық масштабтау әдісі келесі түрде беріледі

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{x}{L}; \quad \tilde{z} = \frac{z}{h_0^*}; \quad \tilde{u} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh_0^*}}; \quad \tilde{w} = \frac{\bar{w}}{\mu\sqrt{gh_0^*}}; \\ \tilde{t} &= \mu t \sqrt{\frac{g}{h_0^*}}; \quad \tilde{h} = \frac{h}{h_0^*}; \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho gh_0^*}.\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

Ал тұтқырлық кернеу тензоры үшін

$$\tilde{\tau}_{xx} = \frac{L\tau_{xx}}{\rho\nu\sqrt{gh_0^*}}; \quad \tilde{\tau}_{zz} = \frac{L\tau_{zz}}{\rho\nu\sqrt{gh_0^*}}; \quad \tilde{\tau}_{xz} = \frac{L\tau_{xz}}{\rho\nu} \sqrt{\frac{h_0^*}{g}} \quad (1.2.9)$$

орынды.

Рейнольдс саны келесі түрде анықталады $Re = h_0^* \sqrt{gh_0^*} / \nu$. Турбуленттік тұтқырлық $O(\mu)$ ретіндегі аз шама деп есептеледі және өлшемсіз түрде [13] еңбегінде анықталғандай

$$\tilde{\nu}_T = \frac{\nu_T}{\mu h_0^* \sqrt{gh_0^*}} \quad (1.2.10)$$

арқылы өрнектеледі. Осыған сәйкес, қалдық кернеу тензорының девиаторлық бөлігінің компоненттері келесі түрде өлшемсіздендіріледі

$$A_{xx}^r = \frac{A_{xx}^r}{\mu^2 \rho gh_0^*}; \quad A_{zz}^r = \frac{A_{zz}^r}{\mu^2 \rho gh_0^*}; \quad A_{xz}^r = \frac{A_{xz}^r}{\mu^2 \rho gh_0^*} \quad (1.2.11)$$

және

$$A_{xx}^r = 2\tilde{\nu}_T \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}; \quad A_{zz}^r = -A_{xx}^r; \quad A_{xz}^r = \tilde{\nu}_T \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \mu^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (1.2.12)$$

арқылы жаза аламыз. Өлшемсіз массаның сақталу теңдеуі

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (1.2.13)$$

Сонымен қатар, Ox бағыты бойынша импульс теңдеуі өлшемсіз түрде

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu^2 \frac{\partial A_{xx}^r}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial A_{xz}^r}{\partial \tilde{z}} + \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\mu \text{Re}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial \tilde{z}} \quad (1.2.14)$$

ал, Oz бағыты бойынша импульс теңдеуі өлшемсіз түрде

$$\begin{aligned} \mu^2 \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}^2}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ = -1 - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \mu^2 \frac{\partial A_{xz}^r}{\partial \tilde{x}} + \mu^2 \frac{\partial A_{zz}^r}{\partial \tilde{z}} + \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\mu \text{Re}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial \tilde{z}} \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

теңдеулерімен жазылады. Таңдалған өлшемсіз айнымалыларға сәйкес, өлшемсіз тұтқырлық диссипациясы сүзгіленген жылдамдық өрісі $\tilde{\varepsilon}_f = h_0^* \varepsilon_f / (g\nu)$ және қалдық қозғалысқа қарай өлшемсіз энергияның берілуі $\tilde{P}^r = P^r / (\mu g \sqrt{gh_0^*})$ арқылы беріледі. Онда кинетикалық энергиясының баланс теңдеуін келесі теңдікпен

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \mu^2 \frac{\tilde{w}^2}{2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\tilde{u} \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \mu^2 \frac{\tilde{w}^2}{2} + \tilde{z} \right) + \tilde{p}\tilde{u} - \mu^2 \left(\tilde{A}_{xx}^r \tilde{u} + \tilde{A}_{xz}^r \tilde{w} \right) - \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\tilde{\tau}_{xx} \tilde{u} + \tilde{\tau}_{xz} \tilde{w} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{w} \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \mu^2 \frac{\tilde{w}^2}{2} + \tilde{z} \right) + \tilde{p}\tilde{w} - \tilde{A}_{xz}^r \tilde{u} - \mu^2 \tilde{A}_{zz}^r \tilde{w} - \frac{1}{\mu \text{Re}} \tilde{\tau}_{xz} \tilde{u} - \frac{\mu}{\text{Re}} \tilde{\tau}_{zz} \tilde{w} \right] = \\ = -\varepsilon_f - P^r \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

өрнектей аламыз. Шекаралық шарт өлшемсіз түрде $\tilde{h} = h/h_0^*$ жазылады және еркін беттегі кинематикалық шарт

$$\tilde{\omega}(h) = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}(h) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, \quad (1.2.17)$$

ал еркін беттегі динамикалық шекаралық шарт (1.2.6) екі скалярлық теңдеуге айналады

$$\tilde{A}_{xz}^r(h) + [\tilde{p}(h) - \mu^2 \tilde{A}_{xx}^r(h)] \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (1.2.18)$$

$$\tilde{p}(h) - \mu^2 \tilde{A}_{zz}^r(h) + \mu^2 \tilde{A}_{xz}^r(h) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (1.2.19)$$

Еркін бетте беттік керілу күші жоқ және сырғанау кернеуі нөлге тең деп қабылданады.

Сүзгіленген теңдеулер тереңдік бойынша орташа алынады. Кез келген A шамасы үшін оның тереңдік бойынша орташа мәні $\langle\langle A \rangle\rangle$ деп белгіленеді және келесі түрде анықталады

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \frac{1}{h} \int_0^{h(x,t)} A dz. \quad (1.2.20)$$

Орташа алынған горизонтал жылдамдық $U = \langle\langle \bar{u} \rangle\rangle$ деп белгіленеді, ал оның өлшемсіз түрі $\tilde{U} = \langle\langle \tilde{u} \rangle\rangle$ болады. Онда сүзгіленген горизонтал жылдамдық

$$\bar{u}(x, z, t) = U(x, t) + u'(x, z, t) \quad (1.2.21)$$

теңдігімен, ал жылдамдықта келесі түрде жіктеледі: $u(x, z, t) = U(x, t) + u'(x, z, t) + u''(x, z, t)$. Мұндағы $u'(x, z, t)$ - сүзгіленген горизонтал жылдамдықтың орташа мәнінен ауытқуы және $u''(x, z, t)$ - қалдық жылдамдық өрісі. Модел әлсіз турбулентті ағын гипотезасы негізінде жасалады, бұл $u''(x, z, t)$ -дың $O(\mu)$ ретінде екенін білдіреді. Бұл гипотеза әлсіз қырқылған ағын гипотезасына [20] ұқсас, мұнда Тешуков көрсеткіші $\beta = 1$ деп алынады. Сондықтан өлшемсіз жылдамдық

$$\tilde{u}(x, z, t) = \tilde{U}(x, t) + \mu \tilde{u}'(x, z, t) \quad (1.2.22)$$

теңдігімен көрсетіледі. Моделді одан әрі зерттеу барысында $O(\mu^2)$ ретіндегі барлық мүшелер сақталады, ал $O(\mu^3)$ ретіндегі мүшелер ескерілмейді.

Рейнольдс санының мәні жеткілікті жоғары деп есептеледі, сондықтан барлық тұтқырлық мүшелері ескерілмейді. Бұл жорамал әдетте осындай есептер үшін қолданылады [19]. Ол былайша өрнектеледі: $Re = O(\mu^{-3})$. Осылайша, $O(\mu/Re)$ ретіндегі мүшелер $O(\mu^4)$ болады. $O(1/(\mu Re))$ ретіндегі мүшелерде $\tilde{\tau}_{xz}$ бар, оның басым мүшесі $\partial \tilde{u}/\partial \tilde{z}$. Себебі $\partial \tilde{U}/\partial \tilde{z} = 0$, $\tilde{\tau}_{xz}$ - іс жүзінде $O(\mu)$ ретінде болады, сондықтан $O(1/(\mu Re))$ ретіндегі мүшелер $O(\mu^3)$ ретінде болады және ескерілмейді. Дәл осы себепті $\tilde{\varepsilon}_f$ мүшесіде ескерілмеді.

Әлсіз турбулентті ағын туралы жорамалдың әсері $\bar{D}$ және P^r шамаларын өлшемсіз түрге келтіру кезінде де қолданылуы мүмкін. $\bar{D}$ мүшесінің ішінде басым компонент әдетте келесі түрде болады (өлшемсіз түрінде)

$$\tilde{D}_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \mu^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right). \quad (1.2.23)$$

Алайда, $\partial \tilde{u}/\partial \tilde{z} = \mu \partial \tilde{u}'/\partial \tilde{z}$. Осыдан

$$\tilde{P}^r = \frac{P^r}{\mu^3 g \sqrt{gh_0^*}} \quad (1.2.24)$$

теңдігі шығады. Осылайша, (1.2.16)-дағы соңғы мүше шын мәнінде $-\mu^2 \tilde{P}^r$ түрінде жазылады. Ол $O(\mu^2)$ ретіндегі мүше болғандықтан, оны сақтау қажет.

1.2.3 Орташаландыру амалы

Белгілеулерді жеңілдету үшін, осы бөлімде толықтай өлшемсіз шамалар қолданылатындықтан, тильда ($\sim$) таңбасы алынып тасталады. Массаның сақталу теңдеуін (1.2.13) тереңдік бойынша орташаландыру арқылы және шекаралық шарттарды ескере отырып, келесі өрнекті аламыз

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h U}{\partial x} = 0. \quad (1.2.25)$$

Үзіліссіз теңдеуі (1.2.13) ден сүзгіден өткен жылдамдықтың өрнегін табуға мүмкіндік береді

$$w = z \frac{\dot{h}}{h} + O(\mu) \quad (1.2.26)$$

мұндағы нүкте белгісі орташа ағын бойымен алынған материалдық туындыны білдіреді

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (1.2.27)$$

Oz бағыты бойынша (1.2.15) импульс теңдеуі алдымен келесі өрнекті береді

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \mu^2 z \frac{\ddot{h}}{h} + \mu^2 \frac{\partial A_{xz}^r}{\partial x} + \mu^2 \frac{\partial A_{zz}^r}{\partial z} \quad (1.2.28)$$

және енді динамикалық шекаралық шартты (1.2.19) қолдана отырып

$$p = h - z - \mu^2 \frac{\ddot{h}}{h} \left[\frac{z^2 - h^2}{2} \right] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_h^z A_{xz}^r dz + \mu^2 A_{zz}^r \quad (1.2.29)$$

қысымның өрнегіне ие боламыз. Динамикалық шекаралық шарт (1.2.18) бойынша қысым мүшелері мен қалдық кернеу мүшелерін интегралдау келесі нәтижені береді

$$-\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_0^h \mu^2 \frac{\partial A_{xx}^r}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial A_{xz}^r}{\partial x} dz = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h p dz + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h A_{xx}^r dz. \quad (1.2.30)$$

Қысымды интегралдау арқылы

$$\int_0^h p dz = \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} + \mu^2 \int_0^h dz \frac{\partial}{\partial x} \int_h^z A_{xz}^r dz A_{xz}^r \mu^2 \int_0^h A_{zz}^r dz \quad (1.2.31)$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$\int_h^z A_{xz}^r dz = \int_h^z \nu_T \frac{\partial u}{\partial z} dz + O(\mu^2). \quad (1.2.32)$$

Турбуленттік тұтқырлық сұйықтық тереңдігі бойынша біркелкі болғандықтан,

$$\int_h^z \nu_T \frac{\partial u}{\partial z} dz = \nu_T (u - u(h)) \quad (1.2.33)$$

теңдігі орынды. Әлсіз турбулентті ағыс гипотезасы $u - u(h) = O(\mu)$ екенін білдіреді. Осылайша, (1.2.31)-дегі сәйкес мүше $O(\mu^3)$ реттілігіне ие және оны ескермеуге болады. Сонда

$$\int_h^z A_{xx}^r dz = -\int_h^z A_{zz}^r dz. \quad (1.2.34)$$

Сәйкесінше, A_{xx}^r – өрнегін пайдалана отырып, келесі теңдікті аламыз

$$\int_h^z A_{xx}^r dz = 2\nu_T \int_h^z \frac{\partial u}{\partial x} dz. \quad (1.2.35)$$

Әлсіз турбулентті ағыс гипотезасы бойынша $u(h) = U + O(\mu)$ орынды. Осыдан,

$$\int_h^z A_{xx}^r dz = 2\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.2.36)$$

Соңында, (1.2.14)-теңдеудің оң жақ бөлігін интегралдау нәтижесінде

$$-\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_0^h \mu^2 \frac{\partial A_{xx}^r}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial A_{xz}^r}{\partial x} dz = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (1.2.37)$$

теңдігіне ие боламыз. Осыдан, шекаралық шарттарды ескере отырып, (1.2.14)-теңдеудің сол жақ бөлігін интегралдау нәтижесінде келесі өрнекті аламыз

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \langle \langle u^2 \rangle \rangle). \quad (1.2.38)$$

Мұндағы $\langle \langle u^2 \rangle \rangle$ – өрісін өңдеу Ричард және Гаврюлук [13] еңбегіндегідей жүргізіледі. Біріншіден, $\langle \langle u^2 \rangle \rangle = U^2 + \mu^2 \langle \langle u'^2 \rangle \rangle$ анықталады өйткені $\langle \langle u' \rangle \rangle = 0$. Екіншіден біз энстрофия деген жаңа айнымалы енгіземіз және келесі түрде анықтаймыз

$$\varphi = \frac{\langle \langle u'^2 \rangle \rangle}{h^2}. \quad (1.2.39)$$

Онда орташаланған импульс теңдеуі ақырында келесі түрде жазылады

$$\frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \mu^2 h^3 \varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) = O(\mu^3). \quad (1.2.40)$$

Бұл моделде үш айнымалы бар: h , U және φ , сондықтан үш теңдеу қажет. Біріншісі – орташа массаның сақталу теңдеуі, екіншісі – орташа импульс теңдеуі, ал үшіншісі – орташа энергия теңдеуі. Шекаралық шарттарды ескере отырып, біз келесі интегралдауды жүргізе аламыз

$$\int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^3}{2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{uw^2}{2} \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{2} \langle \langle u^2 \rangle \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h}{2} \langle \langle u^3 \rangle \rangle \right). \quad (2.2.41)$$

Жоғарыдағыдай өрістеуді пайдалана отырып, $\langle \langle u^2 \rangle \rangle = U^2 + \mu^2 h^2 \varphi$ және $\langle \langle u^3 \rangle \rangle = U^3 + 3\mu^2 h^2 U \varphi + O(\mu^3)$ теңдіктеріне ие боламыз. [20] жұмысына сәйкес, әлсіз турбуленттілік гипотезасы $\langle \langle u'^3 \rangle \rangle$ -ті ескермеуге мүмкіндік береді, осылайша модел толық анықталды. Шекаралық шарттарды, сондай-ақ (1.2.26)-теңдеудегі тік жылдамдық өрнегін ескере отырып, келесі интегралдау нәтижесінің

$$\mu^2 \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{w^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{uw^2}{2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{w^3}{2} \right] dz = \mu^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h \dot{h}^2}{6} \right) + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{h \dot{h}^2}{6} \right) \quad (1.2.42)$$

орындалатынына көз жеткіземіз. Осылайша, (1.2.29)-теңдеудегі қысым өрнегін және шекаралық шарттарды ескере отырып,

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} (uz + pu - \mu^2 A_{xx}^r u - \mu^2 A_{xz}^r w) + \frac{\partial}{\partial z} (wz + pw - A_{xz}^r u - \mu^2 A_{zz}^r w) \right] dz = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[U \left(\frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - \mu^2 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

теңдігін аламыз. Қысым P^r -дың орташа мәні тереңдік бойынша оның Рейнольдс мағынасындағы орташа мәнінің тереңдік бойынша орташа мәнімен бағаланады

$$\langle \langle P^r \rangle \rangle = \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle. \quad (1.2.44)$$

Физикалық тұрғыдан, бұл модельдегі энергияның диссипациясы негізінен турбуленттік кинетикалық энергияның ұсақ масштабтарда диссипациялануынан туындайтынын білдіреді. Орташа энергия теңдеуі ақырында келесі түрде жазылады

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h U e + U \left(\mu^2 h^3 \varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] = \\ & = -\mu^2 h \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle + O(\mu^3) \end{aligned} \quad (1.2.45)$$

мұндағы

$$e = \frac{U^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \varphi}{2} + \mu^2 \frac{\dot{h}^2}{6} + \frac{h}{2}. \quad (1.2.46)$$

1.2.4 Энстрофия теңдеуі

Модел массаның сақталу теңдеуі (1.2.25), импульс теңдеуі (1.2.40) және энергия теңдеулерінен (1.2.45) тұрады. Осы үш теңдеуден энстрофия үшін эволюция теңдеуін шығарып алуға болады. Ол үшін алдымен (1.2.40) теңдеуден

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{h U^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{h U^3}{2} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu^2 h^3 \varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) = O(\mu^3) \quad (1.2.47)$$

келесі өрнегін аламыз. (1.2.45)-теңдеуден (1.2.40)-теңдеуді азайту нәтижесінде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu^2 \frac{h^3 \varphi}{2} + \mu^2 \frac{h \dot{h}^2}{6} + \frac{h^2}{2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu^2 \frac{h^3 U \varphi}{2} + \frac{h^2 U}{2} + \mu^2 \frac{h U \dot{h}^2}{2} + U \left(\mu^2 h^3 \varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \\ & - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu^2 h^3 \varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4\nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\mu^2 h \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

теңдігін және массаның сақталу теңдеуі

$$\dot{h} = -h \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1.2.49)$$

өрнегін береді. Онда келесі теңдіктер орынды

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{h\dot{h}^2}{6} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{hU\dot{h}^2}{6} + U \frac{h^2\ddot{h}}{3} \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \frac{h^2\ddot{h}}{3}, \quad (1.2.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial h^2 U}{\partial x} = U \frac{\partial}{\partial x} \frac{h^2}{2} \quad (1.2.51)$$

және

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{h^3 \varphi}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{3h^3 U \varphi}{2} - U \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \varphi) = \frac{h^3}{2} \frac{D\varphi}{Dt}. \quad (1.2.52)$$

Сәйкесінше,

$$\frac{\partial h\varphi}{\partial t} + \frac{\partial hU\varphi}{\partial x} = \frac{8\nu_T}{h} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{h} \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle \quad (1.2.53)$$

теңдеуі энстрофияның эволюция теңдеуі деп аталады.

Энстрофия орташа ірі масштабты турбуленттік кинетикалық энергиямен және Рейнольдс орташа ағынның жылжу әсерлерімен байланысты. Жоғарыдағы теңдеу энстрофияның турбуленттік тұтқырлық әсерінен пайда болып, турбуленттік кинетикалық энергияның диссипациясы арқылы жойылатынын көрсетеді. Бұл диссипация ұсақ масштабтарда жүреді, өйткені энергия алдымен ірі масштабтардан ұсақ масштабтарға беріледі.

Негізгі консервативті гиперболалық жүйе математикалық тұрғыдан сығылатын сұйықтықтардың Эйлер теңдеулерімен бірдей құрылымға ие. Бұл жүйеде энстрофия энтропияға ұқсас рөл атқарады. Егер бұл гиперболалық жүйені шешу қажет болса, үзілістердің пайда болуы энергияның сақталуын және энстрофияның түзілуін ескере отырып, масса, импульс және энергия теңдеулерін шешуді талап етеді. Алайда, біздің моделде диффузиялық және дисперсиялық мүшелер болғандықтан, үзілістер туындамайды. Сондықтан, теориялық тұрғыдан, масса, импульс және энергия теңдеулерін шешу немесе масса, импульс және энстрофия теңдеулерін шешу эквивалентті болады. Практикалық тұрғыдан, энстрофия теңдеуі (1.2.53) энергия теңдеуіне (1.2.45) қарағанда әлдеқайда қарапайым. Энстрофия теңдеуінде дисперсиялық мүшелер жоқ. Сандық моделдеуде энстрофия теңдеуін қолдану энергия теңдеуіне қарағанда

тиімді. Осы әдісті [21] өздерінің дисперсиялық моделінде ($O(\mu^3)$) реттігіне дейінгі мүшелерді ескере отырып, бірақ диссипация мен тұтқырлықсыз қолданған.

1.3 Диссипация және құйын тұтқырлығы

(1.2.25), (1.2.40) және (1.2.53) теңдеулерінен тұратын моделді толық жабу үшін турбуленттік диссипация $\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ және құйын тұтқырлығы ν_T мәндерін білу қажет. Бұл шамалар Галилей инварианттылығын оңай қанағаттандыру үшін тереңдік h пен энстрофия φ -ға тәуелді, бірақ орташа жылдамдық U -ға тәуелсіз деп болжайық (өйткені φ - Галилей инвариантты шама). Егер орташа жылдамдық U -ға тәуелді болса, онда бұл шамалар $U - \nu_*$ жылдамдығына тәуелді болуы қажет, мұндағы ν_* - сәйкес жылдамдық болуы тиіс. Бұл жылдамдықтың судың түбіндегі жылдамдық болуы мүмкін екені айқын, бірақ моделде түбіне жақын турбуленттік және тұтқырлық процестері ескерілмегендіктен, түбіндегі жылдамдыққа тәуелділікті негіздеу қиын. Турбулентті тұтқырлық үшін тағы бір таңдау бұл [22] жұмысында қарастырылған сияқты $\nu_T = C_v h \sqrt{gh}$, мұндағы C_v - өлшемсіз тұрақты, алайда мұндай өрнек тереңдік үлкен болған жерде турбуленттік тұтқырлықтың үлкен екенін, осылайша, толқын зонасында және күтілетін аймақта кішірек болатынын білдіреді. Бұл әдістің басты кемшілігі - оның толқын бұзылу критерийіне өте тәуелді болып кетуі. Сондықтан турбуленттік тұтқырлықты турбуленттік кинетикалық энергияға тәуелді етіп алу әлдеқайда тиімді.

Егер құйын тұтқырлығы ν_T тек тереңдік h пен энстрофия φ -ға тәуелді деп алсақ, онда өлшемдік талдау

$$\nu_T = C_p h^2 \sqrt{\varphi} \quad (1.3.1)$$

мұндағы C_p - өлшемсіз тұрақты, өрнегін береді. Сондай-ақ, турбуленттік диссипацияны

$$\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle = \frac{C_r}{2} h^2 \varphi^{3/2} \quad (1.3.2)$$

мұндағы C_r - өлшемсіз тұрақты, түрінде анықтаймыз. Айта кету керек, C_r шамасын Рейнольдс санының кері мәні ретінде алуға болады, яғни

$$\nu_T = \frac{h^2 \sqrt{\varphi}}{\text{Re}}. \quad (1.3.3)$$

Осы таңдаулармен модел турбуленттік кинетикалық энергия моделінің математикалық құрылымына ие болады. Бұл моделді 1942 жылы Колмогоров

[23] және 1945 жылы Прандтл [24] жұмыстарында ұсынып, турбуленттік тұтқырлық пен диссипацияны турбуленттік кинетикалық энергияға және араласу ұзындығына негіздеуді ұсынған. Біздің моделде энстрофия φ және су тереңдігі h сәйкесінше турбуленттік кинетикалық энергияны және араласу ұзындығын алмастырады. Шын мәнінде, турбуленттік кинетикалық энергия мөлшері келесідей өрнектеледі $TKE \sim h^2 \varphi$. Алайда, ТКЕ моделінің толықтық мәселесі бұл моделге қатысты емес, себебі h -модель айнымалысы және оны алдын ала анықтаудың қажеті жоқ. Тағы бір айырмашылық — энстрофия теңдеуі турбуленттік кинетикалық энергияның теңдеуіне ұқсас болғанымен, массаның сақталу теңдеуі (1.2.25) біздің моделдің сығылатын сұйықтық теңдеулеріне ұқсастығын көрсетеді. Бұл жерде су тереңдігі h - тығыздықтың аналогы болып табылады.

1.4 Жылжымалы бұзылатын толқындар

Бұл бөлімде 1.1-1.2 бөлімдерде анықталған таяз судағы сынған толқындардың моделінің жылжымалы толқындар шешімін зерттейміз. Алдымен осы моделді жылжымалы толқын айнымалысын енгізу арқылы қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіреміз.

1.4.1 Есептің қойылымы

1.1-1.3 бөлімдерінде анықтаған жағалау толқындарының математикалық моделінің жүйесін қарастырайық

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{gh^2}{2} + h^3\varphi + \frac{h^2\ddot{h}}{3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{\text{Re}} h^3 \sqrt{\varphi} \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h\varphi}{\partial t} + \frac{\partial hU\varphi}{\partial x} = \frac{8h\sqrt{\varphi}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - C_r h \varphi^{3/2} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

мұндағы h - судың тереңдігі, U - тереңдіктің орташаланған көлденең жылдамдығы, g - ауырлық тұрақтысы және φ - энстрофия айнымалысы. Жүйе екі параметрге байланысты: Re – Рейнольдс саны және C_r – турбуленттілік диссипация параметрі. (1.4.1) жүйеде бірінші теңдеу - массаның сақталуы, екіншісі - импульстің сақталуы, ал үшіншісі - энстрофия теңдеуі.

Біз (1.4.1) жүйесі үшін жылжымалы толқын түріндегі шешімдерін іздейміз. Ол үшін жылжымалы толқын координатасын $\xi = x - Dt$ енгізейік. Мұндағы $D = \text{const}$ – толқынның таралу жылдамдығы. Уақыт пен кеңістік туындылары келесідей түрленеді

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{d\xi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -D \frac{d}{d\xi}. \end{cases}$$

Массаның сақталу заңына сәйкес, $h(U - D) = m$. Жалпылықты бұзбай $m > 0$ деп есептеуге болады, яғни ағыс фронт арқылы солдан оңға қарай таралады. Онда

$$\dot{h} = (U - D)h' \text{ және } \ddot{h} = \frac{m^2}{h} \left(\frac{h'}{h} \right)',$$

мұндағы $h' = \frac{dh}{d\xi}$. Осы өрнектерді пайдалана отырып, импульстің сақталу теңдеуін келесі түрде өрнектей аламыз

$$m \frac{dU}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{gh^2}{2} + h^3 \varphi + \frac{h^2}{3} \frac{m^2}{h} \left(\frac{h'}{h} \right)' \right) - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{4}{\text{Re}} h^3 \sqrt{\varphi} \frac{dU}{d\xi} \right) = 0. \quad (1.4.2)$$

(1.4.1) жүйесі Галилей түрлендіру кезінде инвариантты екендігін байқауға болады, яғни өзінің бастапқы түрін сақтайды

$$x = \tilde{x} + Vt, \quad U = \tilde{U} + V, \quad t = \tilde{t} \text{ және } V = \text{const.}$$

Осылайша, жалпы сипаттылығын жоғалтпай, жылжымалы толқындардың жылдамдығы $D = 0$ болатын жағдайды қарастыруға болады, яғни шешім стационарлық болып табылады. (1.4.2) теңдеуін ξ – бойынша бір рет интегралдау арқылы

$$\frac{m^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + h^3 \varphi + \frac{h^2}{3} \frac{m^2}{h} \left(\frac{h'}{h} \right)' + \frac{4}{\text{Re}} h^2 m \sqrt{\varphi} \left(\frac{h'}{h} \right) = I \equiv \text{const}$$

теңдігіне ие боламыз. Бұл теңдік келесі теңдікпен эквивалентті

$$\left(\frac{h'}{h} \right)' = \frac{3I}{hm^2} - \frac{3}{h^2} - \frac{3gh}{2m^2} - \frac{3h^2 \varphi}{m^2} - \frac{12}{m \text{Re}} h \sqrt{\varphi} \left(\frac{h'}{h} \right).$$

Ыңғайлылық үшін Q айнымалысын $h = e^Q$ арқылы енгіземіз. Онда импульстің сақталу теңдеуі

$$\begin{cases} P' = \frac{3I}{m^2} e^{-Q} - 3e^{-2Q} - \frac{3g}{2m^2} e^Q - \frac{3\varphi}{m^2} e^{2Q} - \frac{12}{m \operatorname{Re}} P \sqrt{\varphi} e^Q, \\ Q' = P \end{cases}$$

сәйкес келеді. Енді, энстрофия теңдеуін осы айнымалылар арқылы өрнектесек

$$\begin{aligned} m\varphi' &= \frac{8h\sqrt{\varphi}}{\operatorname{Re}} \left(-\frac{m}{h^2} h' \right)^2 - C_r h \varphi^{3/2}, \\ \varphi' &= \frac{8\sqrt{\varphi}}{h \operatorname{Re}} \left(-\frac{h'}{h} \right)^2 - \frac{C_r h \varphi^{3/2}}{m}, \\ \varphi' &= \frac{8P^2 \sqrt{\varphi}}{\operatorname{Re}} e^{-Q} - \frac{C_r \varphi^{3/2}}{m} e^Q. \end{aligned}$$

Осылайша, (1.4.1) жүйесін

$$\begin{cases} Q' = P \\ P' = \frac{3I}{m^2} e^{-Q} - 3e^{-2Q} - \frac{3g}{2m^2} e^Q - \frac{3\varphi}{m^2} e^{2Q} - \frac{12P\sqrt{\varphi}}{m \operatorname{Re}} e^Q, \\ \varphi' = \frac{8P^2 \sqrt{\varphi}}{\operatorname{Re}} e^{-Q} - \frac{C_r \varphi^{3/2}}{m} e^Q \end{cases} \quad (1.4.3)$$

арқылы өрнектей аламыз. Осы жүйені толық зерттеу үшін алдымен $\varphi \equiv 0$ жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайға (1.4.3) жүйесі Гамильтондық жүйе болады, яғни ол энергияны сақтайды және Гамильтониан $H(Q, P)$ арқылы сипатталады

$$\begin{cases} Q' = P \\ P' = \frac{3I}{m^2} e^{-Q} - 3e^{-2Q} - \frac{3g}{2m^2} e^Q. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

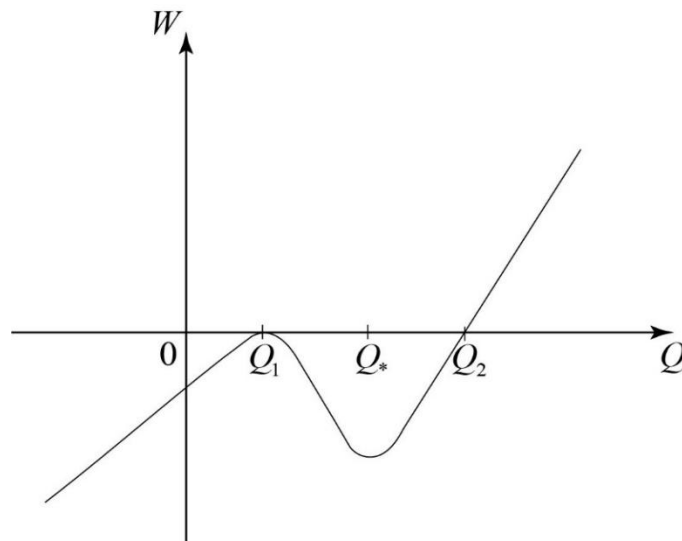
(1.4.4) жүйенің Гамильтонианы

$$H(Q, P) = \frac{P^2}{2} - \frac{3}{2} e^{-2Q} + \frac{3g}{2m^2} e^Q + \frac{3I}{m^2} e^{-Q}.$$

Шынында да, келесі теңдеулердің орындалатынын тексеруге болады

$$\begin{cases} \frac{dQ}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial P}, \\ \frac{dP}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial Q}. \end{cases}$$

Гамильтонианды кинетикалық және потенциалдық энергиялардың қосындысы ретінде өрнектейік $H(Q, P) = \frac{P^2}{2} + W(Q)$, мұндағы $W(Q) = -\frac{3}{2}e^{-2Q} + \frac{3g}{2m^2}e^Q + \frac{3I}{m^2}e^{-Q}$.
Графигін келтіреміз



1.4.1 сурет. Потенциалдық энергия $W(Q)$ графигі.

Потенциалдық энергия $w(Q)$ функциясының сыни нүктелері Q_1 және Q_* нүктелері болсын. Онда $\left. \frac{\partial W}{\partial Q} \right|_{Q=Q_1} = 0$ және $\left. \frac{\partial W}{\partial Q} \right|_{Q=Q_*} = 0$. Сәйкесінше, $W(Q_1) = 0$ есептеуге болады. Шынында да, егер $W(Q_1) = W_1 \neq 0$ болса, онда потенциалдық энергия

$$W(Q) = -\frac{3}{2}e^{-2Q} + \frac{3g}{2m^2}e^Q + \frac{3I}{m^2}e^{-Q} - W_1$$

арқылы өрнектеледі. Бұдан, $w(Q)$ – функциясының қасиеттерін негіздеу үшін, біз келесі лемманы ұсынамыз.

1.1. Лемма. $w(Q)$ – функциясының сыни нүктелері $Q_1 < Q_*$ болсын (немесе эквивалентті түрде $h_1 < h_*$). Онда

$$\frac{mU_1^2}{2} > mgh_1 \Rightarrow |U_1| > \sqrt{2gh_1} \quad \text{және} \quad \frac{mU_*^2}{2} < mgh_* \Rightarrow |U_*| < \sqrt{2gh_*}.$$

Бұл дегеніміз, фронттың алдындағы ағыс ($h = h_1$ кезінде) суперкритикалық, ал фронттың артындағы ағыс ($h = h_*$) субкритикалық болады. Яғни, $Q = Q_1$ нүктесінде $w(Q)$ функциясы локалды максимумға, ал $Q = Q_*$ нүктесінде локалды минимумға ие болады.

Дәлелдеуі: $M_1 = (Q_1, 0)$ және $M_* = (Q_*, 0)$ нүктелерін (1.4.4) жүйенің ерекше нүктелері деп белгілейік. Онда осы нүктелерде $w(Q)$ функциясының туындысы нөлге тең

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{3}{m^2} e^{-Q} \left(m^2 e^{-Q} + \frac{g e^{2Q}}{2} - I \right) = 0.$$

Экспоненциалдық ауыстыруды $e^Q = h$ деп қайта енгізсек, критикалық нүктелер

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{3}{h m^2} \left(\frac{m^2}{h} + \frac{g h^2}{2} - I \right) = 0$$

теңдеуінің түбірі болады. Осы теңдеудің түбірлері $M_1 = (Q_1, 0)$ және $M_* = (Q_*, 0)$ нүктелері үшін

$$\frac{m^2}{h_1} + \frac{g h_1^2}{2} = \frac{m^2}{h_*} + \frac{g h_*^2}{2} \text{ немесе } (h_* - h_1) \left(\frac{m^2}{h_1 h_*} - \frac{g h_*}{2} - \frac{g h_1}{2} \right) = 0$$

орынды. Бұдан $h_* > h_1$ болғандықтан, $\frac{m^2}{h_1 h_*} = \frac{g h_*}{2} + \frac{g h_1}{2}$ теңдігін аламыз. Осы

өрнектер $g h_* > \frac{g h_1}{2} + \frac{g h_*}{2} = \frac{m^2}{h_1 h_*} > \frac{m^2}{h_*^2}$, ал бұл $|U_*| < \sqrt{g h_*}$ теңсіздігін дәлелдейді. Тура

осылай $g h_1 < \frac{g h_1}{2} + \frac{g h_*}{2} = \frac{m^2}{h_1 h_*} < \frac{m^2}{h_1^2}$ теңсіздігін аламыз, ал бұл $|U_1| < \sqrt{g h_1}$ теңсіздігін

дәлелдейді. Екінші ретті туындының теңсіздігі осы теңсіздіктердің салдары

болып табылады, өйткені $\left. \frac{\partial^2 W}{\partial Q^2} \right|_{Q=Q_1} = -\text{sign}(U_1^2 - g h_1)$, $\left. \frac{\partial^2 W}{\partial Q^2} \right|_{Q=Q_*} = -\text{sign}(U_*^2 - g h_*)$,

осылайша 1.1 лемма толық дәлелденді.

1.4.2 Ляпунов функциясы

Динамикалық жүйелерде Ляпунов функциясы жүйенің тұрақтылығын зерттеу үшін қолданылады. Бұл функция белгілі бір күйдегі жүйенің энергиясына сәйкес келеді және оның уақыт бойынша өзгерісі жүйенің

орнықтылығын сипаттайды. Егер Ляпунов функциясы уақыт бойынша азайса, онда жүйе тұрақты күйге жақындайды, ал егер ол өссе, жүйе тұрақсыз болады. (1.4.3) жүйе үшін Ляпунов функциясы (1.2.45) энергия теңдеуінен алынады. Бұл жүйенің динамикасын сипаттайтын негізгі заңдардан шығады, атап айтқанда энергияның сақталу заңына негізделеді. Алдымен (1.2.45) энергия теңдеуін $\mu = 1$ жағдайында қарастырайық

$$\frac{\partial h e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h U e + U \left(h^3 \varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2 \frac{h^2 \ddot{h}}{3} - 4 \nu_T h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] = -h \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle. \quad (1.4.5)$$

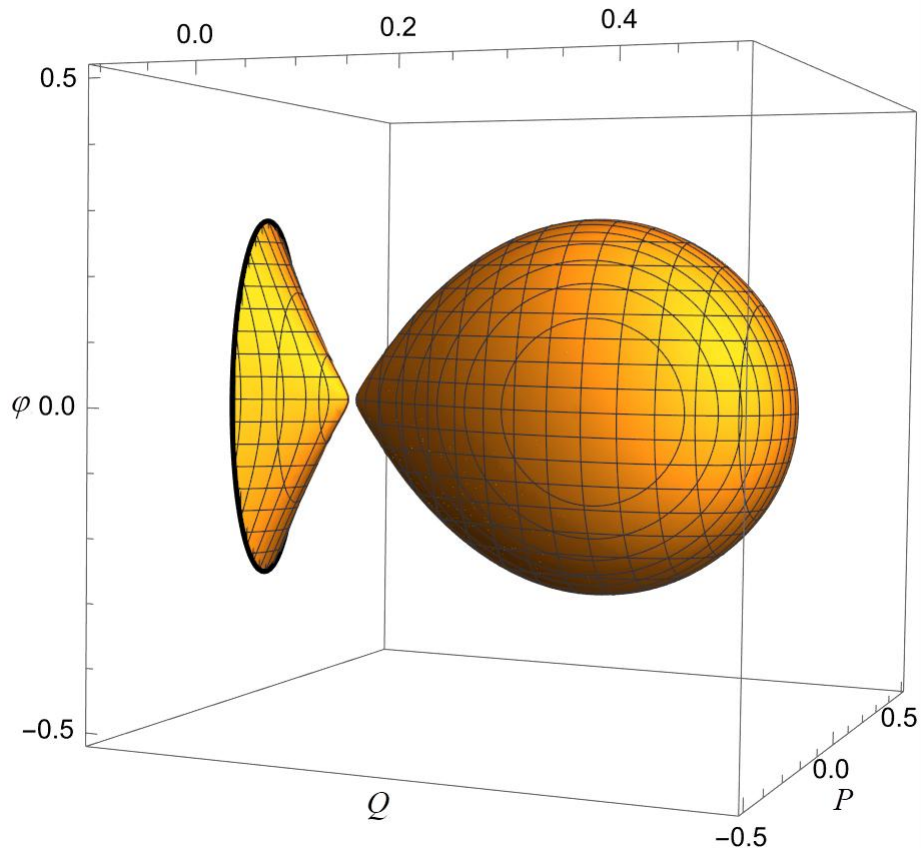
Жылжымалы толқын шешімдері үшін энергия теңдеуі келесі түрге келеді

$$\left(\frac{m^3}{6} \left(\frac{h'}{h} \right)^2 + \frac{mI}{h} + \frac{m\varphi h^2}{2} + \frac{ghm}{2} - \frac{m^3}{2h^2} \right)' = -h \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle \quad (1.4.6)$$

мұндағы (1.3.2) формуладағы $\langle \langle \varepsilon \rangle \rangle = \frac{C_r}{2} h^2 \varphi^{3/2}$ тең. Осылайша, (1.4.3) жүйе үшін Ляпунов функциясы

$$L(Q, P, \varphi) = \frac{m^3}{6} P^2 + m I e^Q + \frac{m\varphi}{2} e^{2Q} + \frac{gm}{2} e^Q - \frac{m^3}{2} e^{-2Q}. \quad (1.4.7)$$

Сәйкесінше (1.4.6) теңдік бойынша Ляпунов функциясының туындысы теріс болады. Бұл жүйенің энергиясы біртіндеп жоғалып, белгілі бір тұрақты күйге келетінін білдіреді. $h_1 = 1$, $m = 4$, $g = 9.8$ мәндеріндегі Ляпунов функциясының теріс аймағының графигі 1.4.2-суретте көрсетілген және осы графиктен жүйенің асимптоталық тұрақтылығы дәлелденеді.



1.4.2 сурет. Ляпунов функциясы

1.4.3 Жылжымалы толқын түріндегі шешімдерінің бар болуы

Есептеуге ыңғайлы болу үшін келесі айнымалыны енгіземіз $\omega: \varphi = \omega^2$. Сонда (1.4.3) жүйесі келесі жүйеге эквивалент

$$\begin{cases} Q' = P \\ P' = \frac{3I}{m^2} e^{-Q} - 3e^{-2Q} - \frac{3g}{2m^2} e^Q - \frac{3\omega^2}{m^2} e^{2Q} - \frac{12P|\omega|}{m \operatorname{Re}} e^Q, \\ \omega' = \frac{8P^2|\omega|}{\operatorname{Re}} e^{-Q} - \frac{C_r \omega |\omega|}{m} e^Q. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

(1.4.4) жүйесі жағдайындағыдай, қасиеттері сол нүктелермен бірдей екі ерекше нүкте бар. Оларды келесідей белгілейміз: $M_1 = (Q_1, 0, 0)$ және $M_* = (Q_*, 0, 0)$. (1.4.8) жүйесіндегі үшінші теңдеудің сызықты бөлігі болмағандықтан екі теңдеуді ғана қарастырамыз. Демек (1.4.8) жүйесін сызықтандыру (Q, P) айнымалылары бойынша ақпарат береді, яғни локалды түрде $(Q - Q_1, P)$ келесідей өрнектеледі

$$(Q - Q_1, P) \approx (a, b) e^{\lambda \xi}$$

мұндағы (a, b) – меншікті вектор және λ – меншікті мән. Ескеретін жағдай, $\omega \equiv 0$ болған кездегі жүйенің меншікті мәні мен меншікті векторы бірдей. Енді (a, b) – меншікті вектор мен λ – меншікті мәнді табайық. Сәйкесінше, $\omega > 0$ болған жағдайды қарастырайық. (1.4.8) жүйесі келесі түрде беріледі

$$\begin{cases} Q' = P \\ P' = \frac{3I}{m^2} e^{-Q} - 3e^{-2Q} - \frac{3g}{2m^2} e^Q - \frac{3\omega^2}{m^2} e^{2Q} - \frac{12P\omega}{m \operatorname{Re}} e^Q, \\ \omega' = \frac{8P^2\omega}{\operatorname{Re}} e^{-Q} - \frac{C_r\omega^2}{m} e^Q. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

(1.4.9) жүйесін $M_1 = (Q_1, 0, 0)$ нүктесінде сызықтандырамыз. Сонда алғашқы екі теңдеу бөлек қарастырылып, келесі жүйені береді

$$\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}, \quad (1.4.10)$$

мұндағы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3g}{m^2} e^{Q_1} + 3e^{-2Q_1} & 0 \end{pmatrix}$, ал A – матрицаның характеристикалық теңдеуі келесі түрде анықталады

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{3g}{m^2} e^{Q_1} + 3e^{-2Q_1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Сәйкесінше, A – матрицасының меншікті мәндері

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{3g}{m^2} e^{Q_1} + 3e^{-2Q_1}} \quad \text{және} \quad \lambda_2 = -\sqrt{-\frac{3g}{m^2} e^{Q_1} + 3e^{-2Q_1}}$$

болады. Сонда 1. 1. леммаға сәйкес, $-\frac{3g}{m^2} e^{Q_1} + 3e^{-2Q_1} > 0$. Осыдан, $\lambda_1 > 0$ және $\lambda_2 < 0$.

Яғни бұл нүкте глобалды түрде ершікті нүктеге сәйкес келеді. Бұл жағдайда бір өлшемді тұрақты және бір өлшемді тұрақсыз көпөрістіктер бар. Сәйкесінше, меншікті векторлар келесі түрде өрнектеледі

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ және } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Енді ω -ның асимптотикасын келесі түрде қарастырайық: $\omega \approx \tilde{\omega} e^{\mu t}$, мұндағы μ және $\tilde{\omega}$ шамалары a және $b = a\lambda$ функциялары ретінде анықталады. Негізгі реттілікте (1.4.9) жүйенің үшінші теңдеуінен мына жуықтауды аламыз

$$\tilde{\omega} \approx \frac{4mb^2}{\text{Re}} e^{-Q_1} \text{ және } \mu \approx 2\lambda.$$

Осылайша, шешімді келесі түрде жазуға болады

$$\begin{cases} Q - Q_1 \approx a e^{\lambda_1 \xi}, \\ P \approx a \lambda_1 e^{\lambda_1 \xi}, \\ \omega \approx \frac{4ma^2 \lambda_1^2}{\text{Re}} e^{-Q_1} e^{2\lambda_1 \xi} \end{cases} \quad (1.4.11)$$

мұндағы $\xi \rightarrow -\infty$. Осы асимптотикалық қасиет $\xi \rightarrow -\infty$ ұмтылған кезде шешімнің $M_1 = (Q_1, 0, 0)$ нүктесіне жақындай отырып, 1.4.2-суретте көрсетілген $L = 0$ бетінің жинақталған аймағына енетінін білдіреді. Бұл процесс тұрақсыз әртүрлілік бойымен жүреді және бұл әртүрлілік ерекшеленген қасиетке ие (ω – шамасы $\xi \rightarrow -\infty$ кезінде P мен $Q - Q_1$ -ге қарағанда әлдеқайда жылдам азаяды). Ал $\xi \rightarrow \infty$ болғанда, шешім $M_* = (Q_*, 0, 0)$ нүктесіне жуықтайды.

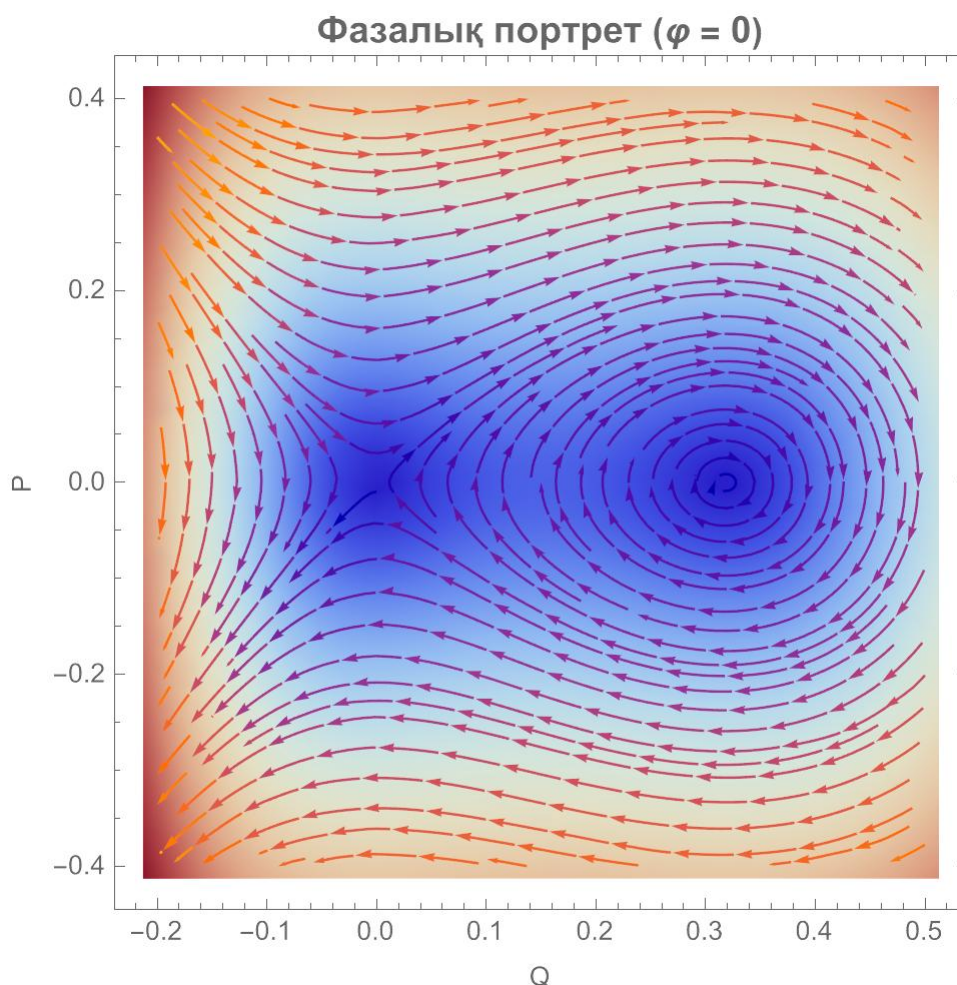
Енді (1.4.9) жүйесін $M_* = (Q_*, 0, 0)$ нүктесінде қарастырайық. $M_* = (Q_*, 0, 0)$ нүктесінде жүйені сызықтандыру арқылы меншікті мәндер

$$\lambda_1^* = \sqrt{-\frac{3g}{m^2} e^{Q_*} + 3e^{-2Q_*}}, \quad \lambda_2^* = -\sqrt{-\frac{3g}{m^2} e^{Q_*} + 3e^{-2Q_*}}$$

мен меншікті векторларды

$$\vec{V}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1^* \end{pmatrix} \text{ және } \vec{V}_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2^* \end{pmatrix}$$

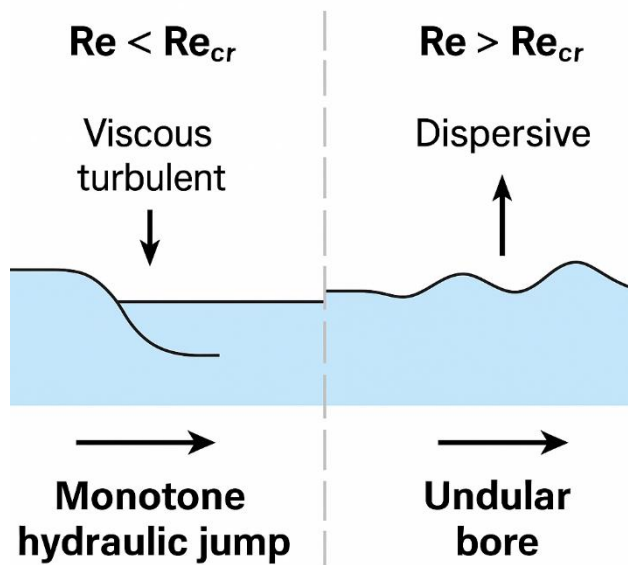
аламыз. 1. 1. леммаға сәйкес, $-\frac{3g}{m^2} e^{Q_*} + 3e^{-2Q_*} < 0$. Осыған сәйкес λ_1^* және λ_2^* комплекс сандар. Онда $M_* = (Q_*, 0, 0)$ нүктесі (Q, P) жазықтығында орталық нүкте болып табылады.



1.4.3 сурет. Фазалық портрет ($\varphi = 0$ жағдайында).

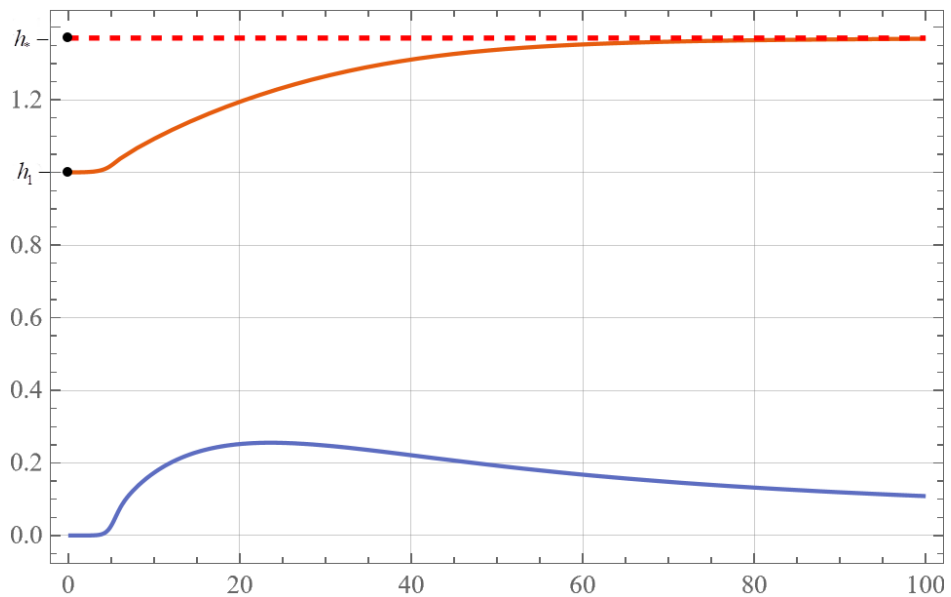
(1.4.9) жүйесінің, $L(Q, P, \varphi)$ - Ляпунов функциясы болғандықтан, шешім $M_* = (Q_*, 0, 0)$ -ға, яғни орнықты нүктеге ұмтылады. Осылайша, $M_* = (Q_*, 0, 0)$ орнықты асимптотикалық тұрақты нүкте болып табылады.

Белгілі бір тұрақты C_r мәні үшін $M_* = (Q_*, 0, 0)$ нүктесінің маңындағы шешімнің қасиеті Рейнольдс санына байланысты өзгереді. Үлкен Рейнольдс сандары жағдайында қозғалыс тербелмелі сипатқа ие болады (яғни, диссипация аз болған кезде). Ал кіші Рейнольдс сандары үшін шешім монотонды болады (диссипация жоғары болған жағдайда).

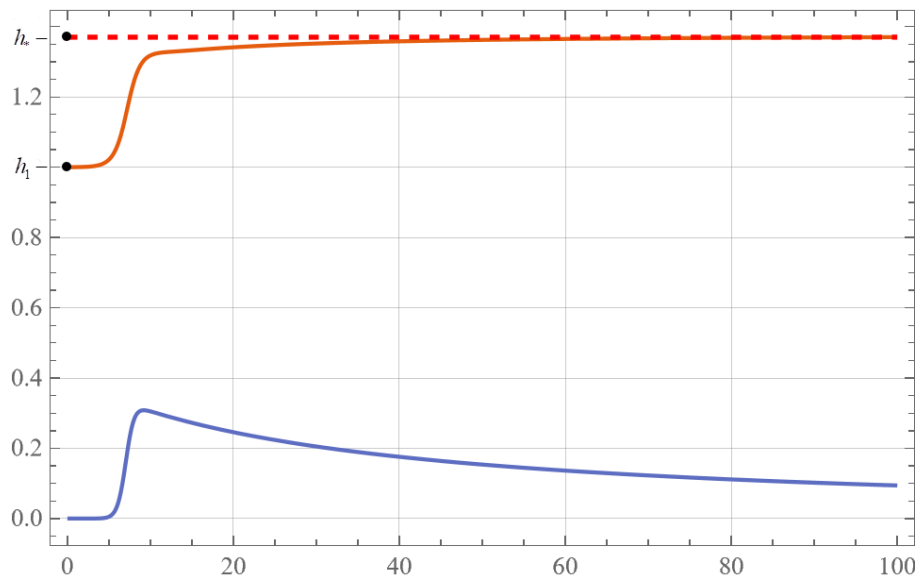


1.4.4 сурет. Re_{cr} – Рейнольдс критикалық мәні

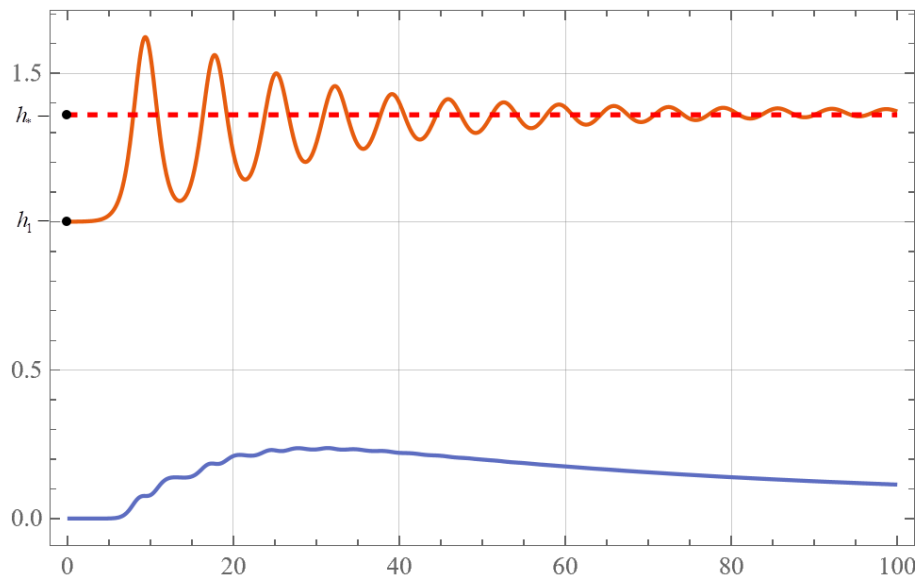
Енді параметрлерді келесідей бекітейік $C_r = 0.48$, $h_1 = 1$, $m = 4$, $g = 9.8$. Бұл жағдайда сындық мән $Re = Re_c \approx 0.71$ монотонды профильден тербелмелі профильге өту шегіне сәйкес келеді (1.4.5, 1.4.6, 1.4.7-суреттер).



1.4.5 сурет. $Re = 0.1 < Re_{cr}$.



1.4.6 сурет. $Re = 0.71 = Re_{cr}$.



1.4.7 сурет. $Re = 10 > Re_{cr}$.

Жүргізілген талдау көрсеткендей, инерциялық күштер мен тұтқырлық тоғысының арақатынасын сипаттайтын Рейнольдс саны белгілі бір шектік мәннен асқанда ағынның мінез-құлқы түбегейлі өзгереді.

- $Re < Re_{cr}$ – тұтқырлық басым, толқын монотонды азаяды, энергия тез диссипацияға ұшырайды;
- $Re > Re_{cr}$ – инерциялық күштер үстем, толқында тербелмелі құрылымдар сақталады, яғни сыну құбылысы күшейеді.

Осы тарауда келтірілген негізгі ғылыми нәтижелер автордың [25] еңбегінде жарияланған.

2 ШЕКАРАСЫ ЖЫЛЖЫМАЛЫ ОБЛЫСТАҒЫ СУ ТОЛҚЫНДАРЫ: КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕҢДЕУІ

Кортевег-де Фриз теңдеуі 1895 жылы [26] еңбегінде де тар әрі таяз арналардағы (мысалы, каналдардағы) кіші амплитудалы су толқындарын моделдеу үшін алғаш рет ұсынылған

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

теңдеуімен анықталды.

Кортевег-де Фриз теңдеуінің ғылыми маңызы әлдеқайда кең. Содан бері бұл теңдеу плазма физикасын қоса алғанда, физика мен инженерияның көптеген басқа салаларындағы есептерге қолданылып келеді. Кортевег-де Фриз теңдеуі теориялық жағынан да, сандық жағынан да жан-жақты зерттелген. Теңдеу үшін бірнеше ақырлы айырымдық схемалар жасалды: солитондардың болуын ашқан Зэбуски мен Крускал ұсынған айқын схема [27] және Года әзірлеген айқын емес схема [28]. Бұдан бөлек, спектралдық әдістер (мысалы, [29], [30]) және ақырлы элементтер әдістері (мысалы, [31–35]) де Кортевег-де Фриз теңдеуін шешуде кеңінен қолданылуда.

Бұл тарауда жоғарыда көрсетілген жұмыстардан негізгі айырмашылығы қарастырылып отырған есептің шекарасы жылжымалы облысқа тиесілі болуында. Осы облыста Кортевег-де Фриз теңдеуіне негізделген математикалық моделді сандық әдіспен шешу қарастырылады.

Ұсынылып отырған тәсіл Галеркин әдісіне негізінделген ақырлы элементтер әдісін қолдануға сүйенеді және уақыт бойынша Кранк-Николсон айырымдық схемасы қолданылады. Бұл әдістердің үйлесімі есептің тұрақтылығын қамтамасыз етеді және алынған сандық есептеулер нәтижелердің дәлдігі мен тиімділігін растайды.

2.1 Негізгі ұғымдар, теория және әдістер.

Бұл бөлімде 2-ші және 3-ші тарауларда қолданылатын негізгі ұғымдар, теориялар мен әдістерге қысқаша шолу беріледі. Атап айтқанда, Галеркин әдісі, ақырлы элементтер әдісі, В-сплайн функциялары, сандық әдістің тұрақтылығы, Кранк-Николсон әдісі және ақырлы айырым әдісі талданып, олардың мазмұны, қолданылу ерекшеліктері мен ғылыми-тәжірибелік маңызы сипатталады.

2.1.1 Галеркиннің ақырлы элементтер әдісі

Галеркиннің ақырлы элементтер әдісі (АЭЭ) физикалық шекаралық мәндер есептерінің көптеген түрлерін шешу үшін қолданылады. Галеркиннің АЭЭ-де барлық облыс біркелкі шектеулі элементтерге бөлінеді, олардың пішіндері

әртүрлі болуы мүмкін. Базистік функцияларды дұрыс таңдау Галеркиннің АЭӨ-де маңызды рөл атқарады. Есептің шешімі осы базистік функциялар арқылы жіктеледі.

Төменде Галеркиннің АЭӨ көмегімен [36] еңбегінде көрсетілгендей шекаралық есептерді шешудің негізгі қадамдары берілген.

- Бірінші қадам: Берілген теңдеудің әлді түрін құрып, күшті түрін жазу.
- Екінші қадам: Берілген теңдеудің әлсіз түрін алу.
- Үшінші қадам: Белгісіз функциялар үшін жуық шешімді таңдау.
- Төртінші қадам: Базис функцияларды таңдау.
- Бесінші қадам: Түйіндік параметрлер үшін Кранк-Николсон және уақыт

туындылары үшін ақырлы айырым схемалары қолданылады.

- Қорытынды қадам: Жүйе тиісті әдіспен шешіледі.

Негізгі Галеркиннің АЭӨ-ті түсіндіру үшін әлді форма болып табылатын шекаралық шарттармен бір өлшемді уақытқа тәуелді жылу ағынының теңдеуін қарастырамыз

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2.1.2)$$

мұндағы u - температура, k - нақты сан, ал x және t сәйкесінше кеңістік пен уақыт айнымалыларды білдіреді.

(2.1.1) теңдеуге Галеркин әдісін және $\varphi(x)$ -салмақ функциясын қолдансақ

$$\int_0^1 \varphi(x)(u_t - ku_{xx})dx = 0 \quad (2.1.3)$$

мұндағы $\varphi(x)$ -есептеу облысы бойынша салмақ функциясы. Бөліктеп интегралдау әдісі бойынша

$$\int_0^1 [\varphi(x)u_t + ku_x \varphi_x(x)]dx - k(\varphi(1)u_x(1, t) - \varphi(0)u_x(0, t)) = 0 \quad (2.1.4)$$

және (2.1.2) шекаралық шарттар негізінде

$$\int_0^1 [\varphi(x)u_t + ku_x \varphi_x(x)]dx = 0 \quad (2.1.5)$$

теңдігіне ие боламыз.

(2.1.5) теңдеуі (2.1.1) теңдеуінің әлсіз формулировкасы болып табылады.

Үшінші қадамда жуықталған шешімді келесі түрде іздейміз

$$u^e(x, t) = \sum_{j=1}^m u_j^e(t) B_j^e(x) \quad (2.1.6)$$

және $u^e(x, t)$ функциясы (2.1.1) теңдеуінің ақырлы элементтер әдісі бойынша жуықталған шешімі болсын.

Галеркиннің АЭӨ-де салмақ функциясы мен базистік функциясы бірдей таңдалады, яғни $W_j = B_j^e$.

Төртінші қадам: (2.1.1) теңдеуінің жуықталған шешімін алу үшін сплайн функциялар салмақ және базис функциялары ретінде пайдалынады. Ал (2.1.6)-дағы өрнекті (2.1.5)-ке қойғанда, элементтің j -ші теңдеуін келесі формада жазуға болады

$$\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^m B_i B_j' \frac{\partial u_j}{\partial t} + k \sum_{j=1}^m B_i' B_j u_j \right] dx = 0. \quad (2.1.7)$$

Жоғарыдағы (2.1.7) теңдеудің матрицалық түрде

$$M_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + k N_{ij} u_j = 0 \quad (2.1.8)$$

көрсетуге болады, мұндағы

$$M_{ij} = \sum_{j=1}^m \int_0^1 B_i B_j' dx, \quad N_{ij} = \sum_{j=1}^m \int_0^1 B_i' B_j dx.$$

Бесінші қадам: Уақыт бойынша туындыны жуықтау үшін $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$ ақырлы айырым тәсілі қолданылады, ал түйіндік параметрлер үшін Кранк-Николсон әдісі $u = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$ қолданылады. Осы әдістерді пайдалану арқылы уақыт параметрлеріне арналған келесі итерация формуласын аламыз

$$(2M + k\Delta t N) u^{n+1} = (2M - k\Delta t N) u^n. \quad (2.1.9)$$

Алдымен, бастапқы шарт арқылы бастапқы векторларды табамыз. Ары қарай итерация арқылы барлық уақыттағы векторлар табылады.

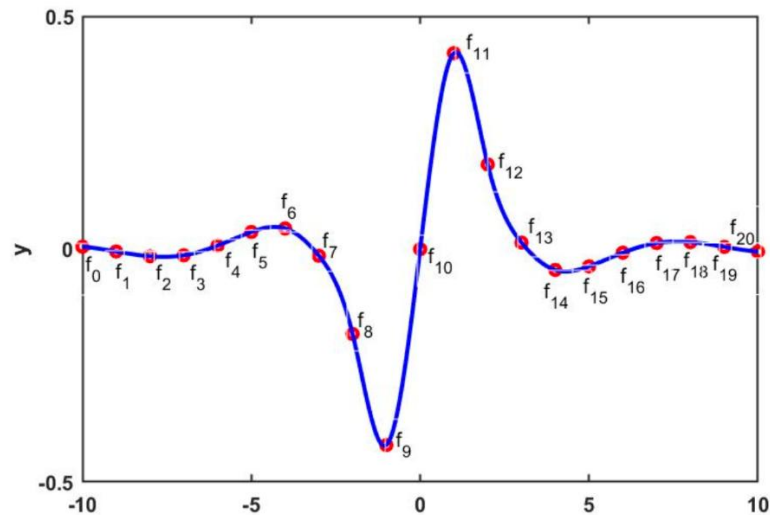
2.1.2. В-сплайн базистік функциялары туралы қысқаша шолу

Галеркиннің ақырлы элементтер әдісінде (АЭӨ) базис функциясын дұрыс таңдау өте маңызды, өйткені шешімнің дәлдігі мен есептеу тиімділігі соған тікелей тәуелді. Осы диссертацияда толық дифференциалды тендеудің шешімі үшін базистік функциялар ретінде сплайн функциялары қолданылады. «Сплайн» деп ұйымдасқан түрде әрбір көршілес нүктелер жұбы арасындағы бөлшекшелген полиномды айтамыз. Ал «кубтық сплайндар» - интерполяцияланған функцияны кеңейтудің ең әмбебап түрі, өйткені олардың екінші туындысы да үздіксіз болады. Осы бөлімде сплайн интерполяциясының қалай жұмыс істейтінін жан-жақты талқылаймыз.

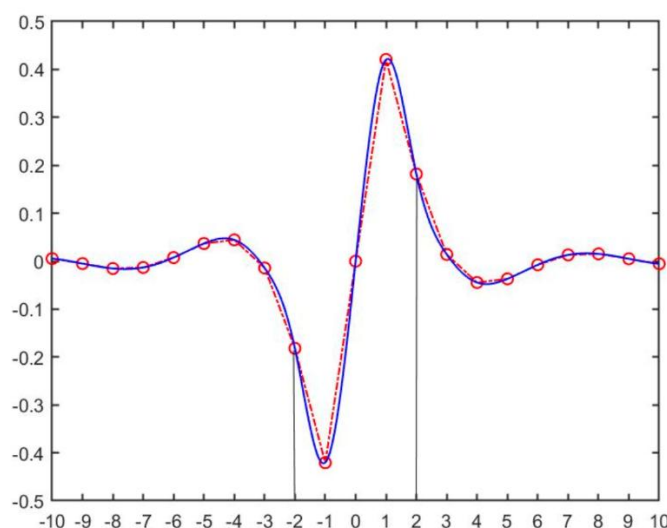
Мысал ретінде $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \sin x$ функциясын $[-10; 10]$ аралығында қарастырайық. $f(x_m)$ мәндері $x_m = -10, -9, \dots, 9, 10$ нүктелерінде берілген. Басқаша айтқанда, $f_m = f(x_m)$, мұндағы $m = 0, \dots, 20$. Бұл жерде x_m - "түйіндер" деп аталатын арнайы таңдалған нүктелер жиыны. 2.1.1-суретке назар салсақ, осы түйіндердің қызыл нүктелермен белгіленгенін көруге болады. Барлығы 21 түйін бар. (x_m, x_{m+1}) интервалынан бастайық. Сызықтық интерполяцияның формуласы [37] бойынша

$$f = Af_m + Bf_{m+1}, \quad (2.1.10)$$

мұндағы $A = \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}$ және $B = \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m}$.



2.1.1 сурет. $[-10; 10]$ интервалындағы $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \sin x$ функциясы.



2.1.2 сурет. $[-10;10]$ аралығындағы функция үшін 21 түйінмен бөлшектелген сызықтық интерполяция.

Осы суреттерде интерполяцияның $|x|$ үлкен мәндерінде жақсы жұмыс істейтінін байқауға болады. Алайда $(-2;2)$ аралығындағы функцияның иілуін бақылауда кейбір кемшіліктер байқалады. Дәлдікті жоғарылату үшін интерполяцияланған түйіндердің санын арттыруға болады, алайда ескеретін жайт функцияның бірінші туындысы түйіндерде үзіліссіз болмауы мүмкін. Сплайндардың бірнеше түрлері бар, мысалы, кубтық, төртінші дәрежелі және бесінші дәрежелі сплайндар. Кубтық сплайн да көптеген класстарға бөлінеді, мысалы, кубтық В-сплайн, кубтық тригонометриялық В-сплайн, кубтық Бета-сплайн және кеңейтілген кубтық В-сплайн. В-сплайн функциясы дифференциалды теңдеулер үшін бірнеше зерттеушілер қолданған. Бұл функцияның жобалау үшін өте қолайлы қасиеттері бар, мысалы, ойыс қабық және үзіліссіз қасиеттері [38]. В-сплайн функциялары $B_k^m(x)$ – тың қасиеттері [37,39] еңбектерінде келтірілген:

1. $B_k^m(x)$ – барлық k, m және x үшін оң.
2. $[x_k, x_{k+1})$ – аралығында $B_k^m(x) > 0$, ал басқа жерлерде $B_k^m(x) = 0$.
3. Түйін аралығы $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ үшін $\sum_{k=0}^m B_k^m(x) = 1$.
4. $B_k^m(x) = B_0^m(x - x_k)$ яғни бұл бірдей реттілікке ие В-сплайн базистік функциясы және олар бір-біріне интерпретацияланады.

- Сызықты В-сплайн базис функциясы.

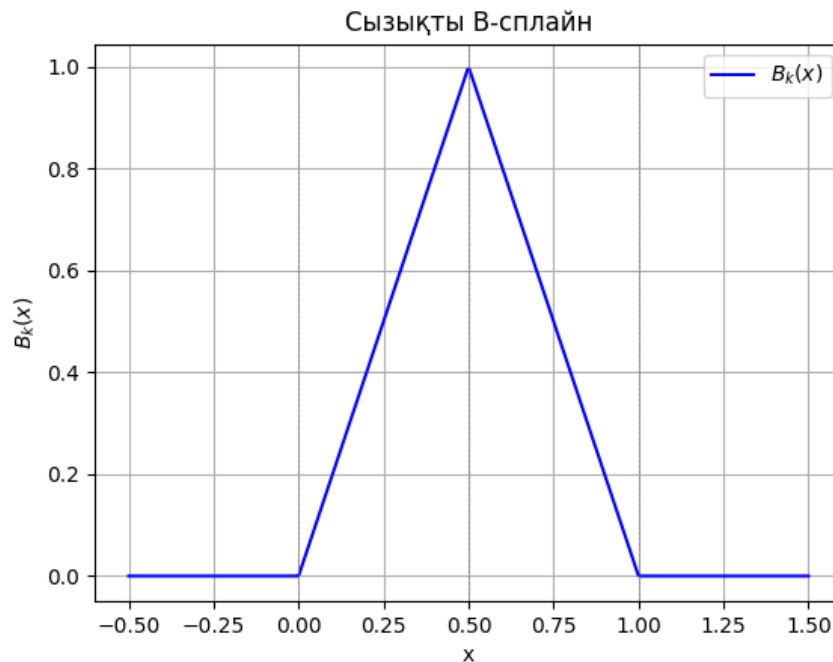
Сызықты В-сплайн базис функциясы [37] жұмысында келесі түрде анықталған

$$B_k = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{k+1} - x) - 2(x_k - x), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ (x_{k+1} - x), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & x \notin (x_{k-1}, x_{k+1}) \end{cases} \quad (2.1.11)$$

мұндағы $[a, b]$ берілген облыс, ол біркелкі ұзындығы бар ақырлы элементтерге бөлінеді. Түйіндер x_k келесі түрде беріледі $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ және $h = \frac{b-a}{N} = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$. Тек осы интервал элементтерін қарастыра отырып, (2.1.11) формуласынан байқауға болатындай, әрбір В-сплайн $B_k(x)$, $x_{k-1} < x < x_{k+1}$ интервалын қамтиды. Осылайша екі сплайн B_k және B_{k+1} әрбір ақырлы элемент $[x_k, x_{k+1}]$ аралығын қамтиды, ал басқа барлық сплайндар сол аралықта нөлге тең болады. Координаталарды $\eta = x - x_k$, $\eta \in [0, h]$ түрлендіруін пайдалана отырып, сызықтық В-сплайн базис функциялары η бойынша $[0, h]$ аралығында

$$(B_k, B_{k+1}) = \frac{1}{h} (h - \eta, \eta) \quad (2.1.12)$$

арқылы өрнектеледі.



2.1.3-сурет: Сызықты В-сплайн базис функциясы.

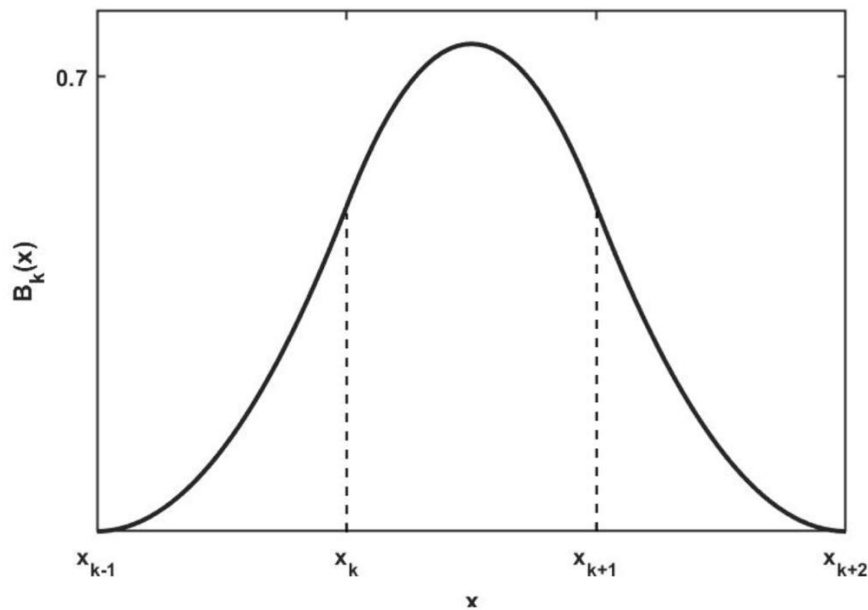
- Квадраттық В-сплайнның базистік функциясы
Квадраттық В-сплайн базистік функциясын [40] жұмысындағыдай

$$B_k = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{k+3} - x)^2 - 3(x_{k+2} - x)^2 + 3(x_{k+1} - x)^2, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ (x_{k+3} - x)^2 - 3(x_{k+2} - x)^2, & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ (x_{k+3} - x)^2, & x \in [x_{k+1}, x_{k+2}], \\ 0, & x \notin (x_{k-1}, x_{k+2}), \end{cases} \quad (2.1.13)$$

теңдігімен анықтайды. Барлық басқа В-сплайн функциялары $[x_{k-1}, x_{k+2}]$ аралығынан тыс жерлерде нөлге тең. Қосымша $\eta = x - x_k$, $\eta \in [0, h]$ түрлендіруін енгізу арқыл квадраттық В-сплайн базистік функцияларын η осі бойынша $[0, h]$ аралығында келесі түрде көрсетуге болады

$$(B_{k-1}, B_k, B_{k+1}) = \frac{1}{h^2} (h^2 - 2\eta h + \eta^2, h^2 + 2\eta h - 2\eta^2, \eta^2), \quad (2.1.14)$$

яғни көрші екі-үш элементті ғана қамтитындықтан, қалған бөліктерде бұл сплайндардың мәні нөл болып қалады. Осы квадраттық В-сплайн функциясының графигі 2.1.4-суретте $[x_{k-1}, x_{k+2}]$ интервалындағы көрсетілген.



2.1.4 сурет: Квадраттық В-сплайн базис функциясы.

- Кубтық В-сплайн базис функциясы
 $[a, b]$ аралығында кубтық В-сплайн функциялары $B_k(x)$, $k = -1, \dots, N+1$, [40] еңбегінде төмендегідей көрсетілген

$$B_k = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-2})^3}{h^3}, & x \in [x_{k-2}, x_{k-1}), \\ 1 + \frac{3(x - x_{k-1})}{h} + \frac{3(x - x_{k-1})^2}{h^2} - \frac{3(x - x_{k-1})^3}{h^3}, & x \in [x_{k-1}, x_k), \\ 1 + \frac{3(x_{k+1} - x)}{h} + \frac{3(x_{k+1} - x)^2}{h^2} - \frac{3(x_{k+1} - x)^3}{h^3}, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ \frac{(x_{k+2} - x)^3}{h^3}, & x \in [x_{k+1}, x_{k+2}], \\ 0, & x \notin (x_{k-2}, x_{k+2}) \end{cases} \quad (2.1.15)$$

мұндағы $h = \frac{b-a}{N}$ -біркелкі қадаммен бөлінген тордың аралығы. (2.1.15) формуласына $\eta = x - x_k$, $\eta \in [0, h]$ түрлендіруін пайдаланғанда, кубтық В-сплайн базистік функцияларын η бойынша $[0, h]$ аралығында

$$\begin{aligned} B_{k-1} &= \frac{1}{h^3} (h - \eta)^3, \\ B_k &= \frac{1}{h^3} (4h^3 - 3h^2\eta + 3h(h - \eta)^2 - 3(h - \eta)^3), \\ B_{k+1} &= \frac{1}{h^3} (h^3 + 3h^2\eta + 3h\eta^2 - 3\eta^3), \\ B_{k+2} &= \frac{1}{h^3} (\eta)^3, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

осылайша, әрбір В-сплайн көрші бірнеше интервалда ғана анықталады да, қалған жерде нөлге тең болады. 2.1.5-суретте кубтық В-сплайн базистік функциясының графигі көрсетілген.



2.1.5 сурет: Кубтық В-сплайн базис функциясы.

- Кварттық В-сплайн базистік функциясы

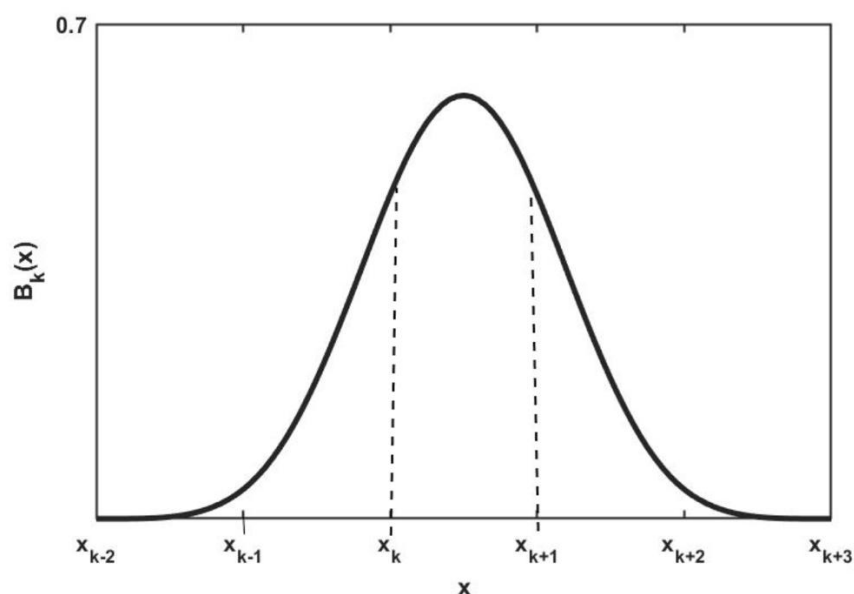
$[a, b]$ аралығында шешім іздейтін есепті біркелкі ұзындықтағы ақырлы элементтерге бөлеміз. Мұндағы түйіндер мынадай тәртіпте орналасады $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, ал $h = \frac{b-a}{N} = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$. Кварттық В-сплайндар $B_k(x)$, $k = -2, \dots, N+1$, осы $[a, b]$ аралығында [40] -те көрсетілгендей, төмендегі пішінде анықталады

$$B_k = \frac{1}{h^4} \begin{cases} p_1 = (x - x_{k-2})^4, & x \in [x_{k-2}, x_{k-1}), \\ p_2 = p_1 - 5(x - x_{k-1})^4, & x \in [x_{k-1}, x_k), \\ p_3 = p_2 + 10(x - x_k)^4, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ (x_{k+3} - x)^4 - 5(x_{k+2} - x)^4, & x \in [x_{k+1}, x_{k+2}], \\ (x_{k+3} - x)^4, & x \in (x_{k+2}, x_{k+3}), \\ 0, & x \notin [x_{k-2}, x_{k+3}]. \end{cases} \quad (2.1.17)$$

Сәйкесінше, (2.1.17) формуласына $\eta = x - x_k$, $\eta \in [0, h]$ түрлендіруін пайдаланғанда, кварттық В-сплайн базис функциялары η бойынша $[0, h]$ аралығында да

$$\begin{aligned}
B_{k-2} &= \frac{1}{h^4} (h^4 - 4\eta h^3 + 6\eta^2 h^2 - 4\eta^3 h + \eta^4), \\
B_{k-1} &= \frac{1}{h^4} (11h^4 - 12\eta h^3 - 6\eta^2 h^2 + 12\eta^3 h - \eta^4), \\
B_k &= \frac{1}{h^4} (11h^4 + 12\eta h^3 - 6\eta^2 h^2 - 12\eta^3 h + \eta^4), \\
B_{k+1} &= \frac{1}{h^4} (h^4 + 4\eta h^3 + 6\eta^2 h^2 + 4\eta^3 h - \eta^4), \\
B_{k+2} &= \frac{1}{h^4} (\eta)^4
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

ретінде өрнектеуге болады.



2.1.6 сурет: Кварттық В-сплайн базис функциясы.

- Квинтикалық В-сплайн базистік функциясы

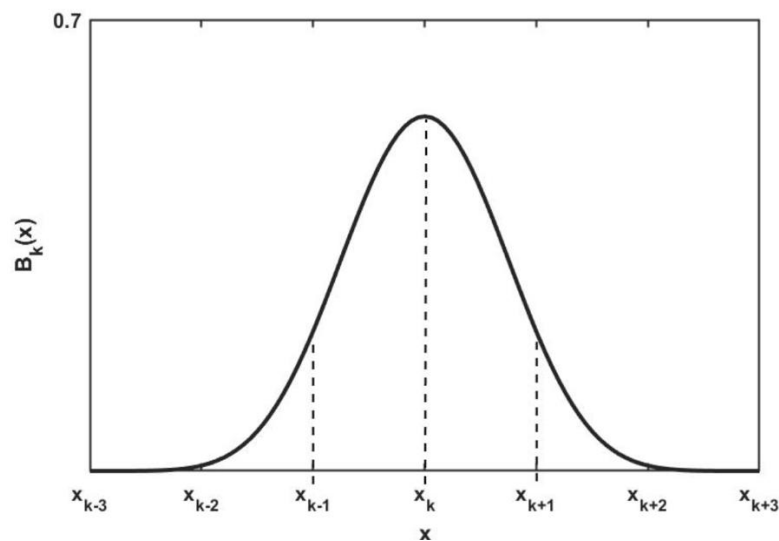
$[a, b]$ аралығында шешім іздейтін есепті біркелкі ұзындықтағы ақырлы элементтерге бөлеміз. Мұндағы түйіндер мынадай тәртіпте орналасады: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, ал $h = \frac{b-a}{N} = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$. Квинтикалық В-сплайндар $B_k(x)$, $k = -2, \dots, N+2$, осы $[a, b]$ аралығында [40] -те көрсетілгендей,

$$B_k = \frac{1}{h^5} \begin{cases} p_1 = (x - x_{k-3})^5, & x \in [x_{k-3}, x_{k-2}), \\ p_2 = p_1 - 6(x - x_{k-2})^5, & x \in [x_{k-2}, x_{k-1}), \\ p_3 = p_2 + 15(x - x_{k-1})^5, & x \in [x_{k-1}, x_k), \\ p_4 = p_3 - 20(x - x_k)^5, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ p_5 = p_4 + 15(x - x_{k+1})^5, & x \in [x_{k+1}, x_{k+2}), \\ p_6 = p_5 - 6(x - x_{k+2})^5, & x \in [x_{k+2}, x_{k+3}), \\ 0, & x \notin [x_{k-2}, x_{k+3}] \end{cases} \quad (2.1.19)$$

анықталады. (2.1.19) формуласына $\eta = x - x_k$, $\eta \in [0, h]$ түрлендіруін пайдаланғанда, кuartттық В-сплайн базис функциялары η бойынша $[0, h]$ аралығында да

$$\begin{aligned} B_{k-3} &= \frac{1}{h^5} (h^5 - 5\eta h^4 + 10\eta^2 h^3 - 10\eta^4 h + \eta^5), \\ B_{k-2} &= \frac{1}{h^5} (26h^5 - 50\eta h^4 + 20\eta^2 h^3 + 20\eta^3 h^2 - 20\eta^4 h + 5\eta^5), \\ B_{k-1} &= \frac{1}{h^5} (66h^5 - 60\eta^2 h^3 + 30\eta^4 h - 10\eta^5), \\ B_k &= \frac{1}{h^5} (26h^5 + 50\eta h^4 + 20\eta^2 h^3 - 20\eta^3 h^2 - 20\eta^4 h + 10\eta^5), \\ B_{k+1} &= \frac{1}{h^5} (h^5 + 5\eta h^4 + 10\eta^2 h^3 + 10\eta^3 h^2 + 5\eta^4 h - 5\eta^5), \\ B_{k+2} &= \frac{1}{h^5} (\eta)^5 \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

ретінде өрнектеуге болады. 2.1.7-суретте квинтикалық В-сплайн функциясының $[x_{k-3}, x_{k+3}]$ аралығындағы графигі көрсетілген.



2.1.7 сурет: Квинтикалық В-сплайн базис функциясы.

2.1.3 Ақырлы айырым әдісі

Ақырлы айырым әдісі – сандық аппроксимацияның ең танымал және кеңінен қолданылатын әдістерінің бірі. Әсіресе бұл әдіс қарапайым дифференциалдық теңдеулерді және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуде көп қолданылады. Соңғы он жыл көлемінде дифференциалдық теңдеулерді шешу мақсатында ақырлы айырым әдісінің орнықтылығы мен жинақталуы жан-жақты зерттеліп келеді. Бұл әдістің жұмыс істеу қағидасы – дифференциалдық теңдеудегі ақырлы нүктелер аралығын анықтайтын тәуелсіз айнымалы өзгеріп отырады, ал тәуелді айнымалы шамамен (аппроксимациялану арқылы) есептеледі.

Ақырлы айырым әдісі алғаш рет Тейлор қатарынан туындаған. Ақырлы айырым әдісін зерттеу барысында кеңістік x және уақыт t айнымалыдан тұратын $u(x,t)$ функция ретінде алынады. Осылайша, $u(x,t)$ функциясының шектеулі (ақырлы) Тейлор полиномы

$$u(x_j + h, t_k) = u(x_j, t_k) + hu_x(x_j, t_k) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_j, t_k) + \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_j, t_k) + \dots, \quad (2.1.20)$$

$$u(x_j - h, t_k) = u(x_j, t_k) - hu_x(x_j, t_k) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_j, t_k) - \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_j, t_k) + \dots \quad (2.1.21)$$

енгізіледі. (2.1.20)-теңдеуді қайта реттеу арқылы, бірінші ретті алға бағытталған айырма аппроксимациясы алынады. Нәтижесінде мынадай өрнек шығады

$$u_x(x_j, t_k) = \frac{u(x_j + h, t_k) - u(x_j, t_k)}{h}. \quad (2.1.22)$$

Ал (2.1.21)-теңдеуінен, бірінші ретті кері бағытталған (backward) айырма аппроксимациясы алынады

$$u_x(x_j, t_k) = \frac{u(x_j, t_k) - u(x_j - h, t_k)}{h}. \quad (2.1.22)$$

Осылайша, (2.1.20)-теңдеуді (2.1.21)-теңдеуден шегеріп, $u_x(x_j, t_k)$ өрнегін бөліп шығару арқылы

$$u_x(x_j, t_k) = \frac{u(x_j + h, t_k) - u(x_j - h, t_k)}{2h} \quad (2.1.23)$$

өрнегіне ие боламыз. (2.1.23)-теңдеуді көбіне бірінші ретті орталық (central) айырма аппроксимациясы деп атайды.

2.1.4 Кранк-Николсон әдісі

Сандық талдауда Кранк-Николсон әдісі — ақырлы айырмалар әдісі, ол жылуөткізгіштік теңдеуін және дербес туындылы соған ұқсас теңдеулерді сандық шешу үшін қолданылады. Бұл уақыт бойынша екінші ретті әдіс. Ол уақыт бойынша жасырын (имплициттік), Рунге–Кутта әдісінің жасырын түрі ретінде жазылуы мүмкін және сандық жағынан орнықты. Әдісті 1940-жылдары Джон Кранк пен Филлис Николсон жасап шығарған [41].

Кранк–Николсон әдісінің негізгі қағидаты трапеция ережесіне сүйенеді, мұның арқасында уақыт бойынша есептеулерде екінші ретті дәлдікке қол жеткізіледі. Сызықты теңдеулер жағдайында трапеция ережесі жасырын орташа нүкте әдісіне балама болады – бұл Гаусс–Лежандр, Рунге–Кутта жасырын әдістерінің ең қарапайым мысалы әрі геометриялық интегратор қасиетіне ие. Мысалы, бір өлшемді есеп үшін дербес туындылы теңдеуді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \quad (2.1.23)$$

түрінде алайық.

$u(i\Delta x, n\Delta t) = u_i^n$ және $F_i^n = F(i\Delta x, n\Delta t, u_i^n)$ мәндерінде есептелетін) деп белгілесек. Кранк–Николсон әдісінің теңдеуі n -дегі «алға» (тікелей) Эйлер мен $n+1$ -дегі «кері» Эйлер әдістерінің синтезіне негізделгенін байқаймыз. Алайда, кері Эйлер теңдеуінің өзі шешімге жасырын тәуелді болғандықтан, бұл әдісті екі Эйлер әдісінің қарапайым орташа мәні деп қабылдау қате.

Тиісті формулалар мынадай:

Әдіс	Формула
Эйлер тікелей формуласы	$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$
Эйлер кері формуласы	$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1}(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$
Кранк-Николсон формуласы	$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_i^{n+1}(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + F_i^n(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}))$

2.2 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег–де Фриз теңдеуі

Бұл бөлімде шекарасы жылжымалы және біртекті шекаралық шарттары бар шектелген облыстағы Кортевег–де Фриз теңдеулерімен байланысты математикалық модел үшін шешімнің бар және жалғыз болуын қарастырамыз.

Шекарасы

$$D_\tau = \{\xi \in R \mid \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), \tau > 0\},$$

болатын шекарасы жылжымалы

$$Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$$

облысында классикалық Кортевег–де Фриз теңдеуін

$$\mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}\mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.2.1)$$

келесі бастапқы және біртекті шекаралық шарттармен

$$\mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), \quad \xi \in D_0, \quad (2.2.2)$$

$$\mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) = \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = \mathcal{G}_\tau(\beta(\tau), \tau) = 0 \quad (2.2.3)$$

қарастырайық, мұндағы $\alpha(\tau), \beta(\tau) \in C^2(0, T)$ және

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_0 \leq \beta(\tau) - \alpha(\tau) \leq \beta_0 < \infty, \\ \alpha'(\tau) \leq 0, \quad \beta'(\tau) \geq 0, \quad \forall \tau \geq 0. \end{aligned}$$

2.2.1 Есепті цилиндрлік облысқа көшіру

Алдымен цилиндрлік емес $Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$ облысы мен цилиндрлік $Q = (0, 1) \times (0, T)$ облысының арасындағы байланыс қарастырылады. Осы екі облыс арасындағы байланыс келесі диффеоморфизм [42, 43] арқылы анықталады

$$\begin{aligned} \Gamma: Q_\tau &\rightarrow Q \\ (\xi, \tau) &\mapsto \Gamma(\xi, \tau) = (x, t) \end{aligned}$$

мұндағы $x = \frac{\xi - \alpha(\tau)}{\gamma(\tau)}$ және $\gamma(\tau) = \beta(\tau) - \alpha(\tau) \neq 0$.

Ал оның кері бейнелеуі

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}: Q &\rightarrow Q_\tau \\ (x, t) &\mapsto \Gamma^{-1}(x, t) = (\xi, \tau) \end{aligned}$$

болады, мұндағы $\xi = \alpha(\tau) + \gamma(\tau)x$.

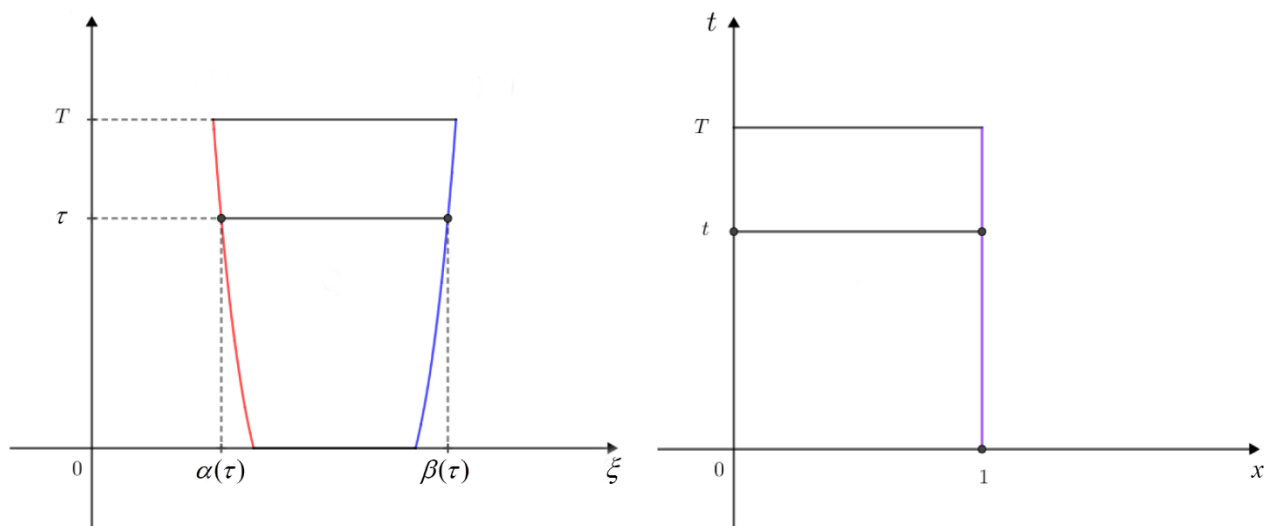
Айталық $\Gamma: Q_\tau \rightarrow Q$ түрлендіруі шекарасы жылжымалы Q_τ облысын Q облысына және керісінше элементтерінің ауысуын қамтамасыз етеді, өйткені бұл түрлендіру диффеоморфизм 2.3.1-суретте көрсетілгендей.

$$Q_\tau \xrightarrow{\Gamma} Q$$

$$Q \xleftarrow{\Gamma^{-1}} Q_\tau$$

2.3.1-сурет. Γ және Γ^{-1} түрлендіруі

Осылайша Q_τ облысын 2.3.2 суретте көрсетілгендей



2.3.2-сурет. Q_τ облысы және Q облысы

тікбұрышты Q облысына түрленеді. Осылайша, $u(x, t)$ функциясы $\mathcal{G}(\xi, \tau)$ функциясы арқылы жызлады

$$u(x, t) = \mathcal{G} \circ \Gamma^{-1}(x, t) = \mathcal{G}(\alpha(t) + \gamma(t)x, t).$$

Енді $\mathcal{G}(\xi, \tau) = u(x, t)$ теңдігі негізінде (2.3.1) теңдеуінің мүшелері келесі түрде өрнектеледі

$$\mathcal{G}_\tau(\xi, \tau) = u_t(x, t) - \frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)x}{\gamma(t)} u_x(x, t),$$

$$\mathcal{G}_\xi(\xi, \tau) = \frac{1}{\gamma(t)} u_x(x, t), \quad \mathcal{G}_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{1}{\gamma^3(t)} u_{xxx}(x, t).$$

Осы өрнектер бойынша (2.3.1) теңдеуі

$$u_t - \frac{\alpha(t) + \gamma'(t)x}{\gamma(t)} u_x + \frac{1}{\gamma(t)} u u_x + \frac{1}{\gamma^3(t)} u_{xxx} = 0 \quad (2.2.4)$$

түрінде жазылады.

Бұл алмастыру нәтижесінде (2.2.1)-(2.2.3) есебі келесі есепке ауысады

$$\begin{cases} u_t - a(x,t)u_x + b_1(t)uu_x + b_2(t)u_{xxx} = 0, & (x,t) \in Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u_x(1,t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in (0,1) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

мұндағы

$$a(x,t) = \frac{\alpha'(t) + x\gamma'(t)}{\gamma(t)}, \quad b_1(t) = \frac{1}{\gamma(t)}, \quad b_2(t) = \frac{1}{\gamma^3(t)}.$$

2.2.2 Әлсіз шешімнің бар және жалғыз болуы

Айталық $V = \{w \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1); w_x(1) = 0\}$ болсын. Ізделініп отырған $u(x,t)$ функциясы барлық $t \in [0,T]$ уақытта келесі әлсіз формадағы теңдеуді қанағаттандырсын

$$\begin{cases} (u_t(t), w) - (a(x,t)u_x(t), w) + b_1(t)(u(t)u_x(t), w) + b_2(t)(u_{xxx}(t), w) = 0, \\ (u(0), w) = (u_0, w), \quad \forall w \in V. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

2.1 Теорема. Егер $u_0(x) \in V$ шарты орындалса, онда (2.2.6) есептің

$$u(x,t) \in C(H_0^1(0,1); (0,T)) \cap L^2(V; (0,T)) \quad \text{және} \quad u_t(x,t) \in L^2(H_0^1(0,1); (0,T))$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз әлсіз шешімі бар.

Дәлелдеуі. V_m кеңістігі V кеңістігіндегі $\{w_1, \dots, w_m\}$ ортогонал негізімен созылатын іш кеңістік болсын. Онда шешімді

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^m c_{im}(t)w_{im}(x) \in V_m \quad (2.2.7)$$

түрде іздейміз және V облысында келесі жуықтаушы есепті қарастырамыз

$$\begin{cases} (u_{m_t}(t), w) - (a(x, t)u_{m_x}(t), w) + b_1(t)(u_m(t)u_{m_x}(t), w) \\ \quad - b_2(t)(u_{m_{xx}}(t), w_x) = 0, \quad \forall w \in V, \\ u_m(0, t) = u_m(1, t) = u_{m_x}(1, t) = 0, \\ u_m(x, 0) = u_{0m}(x) \rightarrow u_0(x). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

2.1 ескерту. $c_{im}(0)$ коэффициенттерін $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ кеңістігінде $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{0m}(x) \rightarrow u_0(x)$ шарты орындалатындай таңдап алуға болады.

Енді $u_m(x, t)$ функциясын (2.2.8) теңдеуге қойып және $w = w_{km}$ деп алғанда,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m [(c'_{im}(t)w_i, w_k) - (a(t)c_{im}(t)w_{i_x}, w_k) + b_1(t)(c_{im}(t)w_i \sum_{j=1}^m c_{jm}(t)w_{j_x}, w_k) \\ \quad - b_2(t)(c_{im}(t)w_{i_{xx}}, w_x)] = 0, \\ u_m(0, t) = u_m(1, t) = u_{m_x}(1, t) = 0, \\ u_m(x, 0) = u_{0m}(x) \rightarrow u_0(x). \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Бейсызықты (2.2.9) жүйенің Каратеодори теоремасына сәйкес $0 \leq t < t_m < T$ аралығында локалді шешімі бар. Осы локалды шешімді m -ге тәуелсіз түрде $(0, T)$ аралығына дейін жалғастыру үшін априорлық бағалаулар қажет.

Бірінші бағалау. Барлық $t \in [0, t_m)$ үшін (2.2.8) теңдеуінде $w = 2u_m$ деп алайық. Сонда

$$2(u_{m_t}, u_m) - 2(a(x, t)u_{m_x}, u_m) + 2b_1(t)(u_m u_{m_x}, u_m) - 2b_2(t)(u_{m_{xx}}, u_{m_x}) = 0 \quad (2.2.10)$$

теңдігін аламыз. (2.2.10) теңдіктің бірінші мүшесін

$$2(u_{m_t}, u_m) = \frac{d}{dt} \|u_m\|^2$$

түрінде жазуға болады. Шекаралық шарттарды ескере отырып

$$-2(a(x, t)u_{m_x}, u_m) = -\int_0^1 a(x, t) (u_m^2)_x dx = \int_0^1 a_x(x, t) u_m^2 dx \leq \|a_x(x, t)\|_\infty \|u_m^2\|,$$

$$(u_m u_{m_x}, u_m) = (u_{m_x}, u_m^2) = \int_0^1 u_{m_x} u_m^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (u_m^3)_x dx = 0,$$

$$-2b_2(t)(u_{m_{xx}}, u_{m_x}) = -2b_2(t) \int_0^1 u_{m_{xx}} u_{m_x} dx = -b_2(t) u_{m_x} \Big|_{x=0}^{x=1} = b_2(t) u_{m_x}(0, t) < \infty$$

бағалауларын алуға болады. Осы бағалауларды ескеріп (2.2.10) теңдігінен

$$\frac{d}{dt} \|u_m\|^2 + b_2(t) u_{m_x}(0, t) \leq \|a_x(x, t)\|_\infty \|u_m^2\|$$

бағалауын аламыз. Соңғы бағалауды $t \in [0, t_m)$ кезінде $(0, t)$ аралығында интегралдасақ

$$\|u_m\|^2 + \int_0^t b_2(s) u_{m_x}(0, s) ds \leq \|u_m\|^2(0) + \int_0^t \|a_x(x, s)\|_\infty \|u_m\|^2(s) ds$$

орныды. 2.1 Ескерту бойынша V кеңістігінде $u_m(x, 0) = u_{0m}(x) \rightarrow u_0(x)$, келесі бағалаулар орынды

- $\exists c_1 > 0 : \|u_m\|(0) \leq c_1$;
- $\exists c_2 > 0 : \int_0^t \|a_x(x, s)\| ds \leq c_2$.

Осыдан $\|u_m\|^2 + \int_0^t b_2(s) u_{m_x}(0, s) ds \leq c_1 + c_2 \int_0^t \|u_m\|^2(s) ds$ бағалауын аламыз. Енді Гронуолл теңсіздігін қолдансақ, $u_m \in L^\infty(L^2(0, 1); (0, T))$. Сонымен қатар, жоғарыдағы теңсіздікке сүйенсек, $\int_0^t |u_{m_x}(0, s)| ds$ да шенелген.

Екінші бағалау. Барлық $t \in [0, t_m)$ үшін (2.2.8) теңдеуінде $w = 2xu_m$ деп алсақ,

$$2(xu_{m_t}, u_m) - 2(a(x, t)xu_{m_x}, u_m) + 2b_1(t)(xu_m u_{m_x}, u_m) - 2b_2(t)(u_{m_{xx}}, (xu_m)_x) = 0 \quad (2.2.11)$$

теңдігін аламыз. Енді (2.2.11)-теңдігінің сол жағындағы мүшелердің жоғарғы шегін алайық

$$\begin{aligned} 2(xu_{m_t}, u_m) &= \int_0^1 x \frac{d}{dt} u_m^2 dx = \frac{d}{dt} (x, u_m^2), \\ -2(a(x, t)xu_{m_x}, u_m) &= -\int_0^1 a(x, t)x(u_m^2)_x dx = \int_0^1 a(x, t)u_m^2 dx + \int_0^1 a_x(x, t)xu_m^2 dx \\ &\leq \|a(x, t)\|_\infty \|u_m\|^2 + \|a_x(x, t)\|_\infty (x, u_m^2), \\ -2b_2(t)(u_{m_{xx}}, (xu_m)_x) &= -2b_2(t) \int_0^1 u_{m_{xx}} xu_{m_x} dx - 2b_2(t) \int_0^1 u_{m_{xx}} u_m dx. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Келесі мүшелер үшін

$$-2b_2(t) \int_0^1 u_{m_{xx}} xu_{m_x} dx = -b_2(t) \int_0^1 x (u_{m_x}^2)_x dx = b_2(t) \|u_{m_x}\|^2,$$

$$-2b_2(t) \int_0^1 u_{m_{xx}} u_m dx = 2b_2(t) \int_0^1 u_{m_x} u_{m_x} dx = 2b_2(t) \|u_{m_x}\|^2$$

орындалады, енді (2.2.12) теңдеуге соңғы мүшені орнына қойсақ,

$$-2b_2(t)(u_{m_{xx}}, (xu_m)_x) = 3b_2(t) \|u_{m_x}\|^2$$

Ал бейсызықты мүше үшін

$$2b_1(t)(u_m u_{m_x}, xu_m) = 2 \int_0^1 u_m^2 u_{m_x} x dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (u_m^3)_x x dx = \frac{2}{3} u_m^3 x \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{3} \int_0^1 u_m^3 dx$$

теңдігін аламыз. Алынған өрнектерді (2.2.11)-ге қойсақ,

$$\frac{d}{dt}(x, u_m^2) + 3 \|u_{m_x}\|^2 \leq \|a(x, t)\|_\infty \|u_m\|^2 + \|a_x(x, t)\|_\infty (x, u_m^2) + \frac{2}{3} \int_0^1 u_m^3 dx \quad (2.2.13)$$

бағалауын аламыз. Енді $\frac{2}{3} \int_0^1 u_m^3 dx$ бағалайық. Ол үшін қарапайым

$ab \leq \frac{1}{2}(ka^2 + \frac{1}{k}b^2), k > 0$ теңсіздігін қолданамыз. Сонда

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_0^1 u_m^3 dx &\leq \frac{2}{3} \int_0^1 |u_m| |u_m|^2 dx \leq \frac{2k^{1/2}}{3} \|u_m\|_{L^\infty(0,1)} \frac{1}{k^{1/2}} \int_0^1 |u_m|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \left(k \|u_m\|_{L^\infty(0,1)}^2 + \frac{1}{k} \left(\int_0^1 |u_m|^2 dx \right)^2 \right) \leq \frac{kc_x}{3} \|u_m\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \frac{1}{3k} \|u_m\|_{L^2(0,1)}^4. \end{aligned}$$

$k = \frac{6}{c_\chi}$ деп алып және $\|\cdot\|_{L^\infty(0,1)} \leq c_\chi \|\cdot\|_{H_0^1(0,1)}$ бағалауын қолданып

$$\frac{2}{3} \int_0^1 u_m^3 dx \leq 2 \|u_{m_x}\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{c_\chi}{18} \|u_m\|_{L^2(0,1)}^4 \quad (2.2.14)$$

аламыз. (2.2.14)-ті (2.2.13)-ке қойып

$$\frac{d}{dt}(x, u_m^2) + \|u_{m_x}\|^2 \leq \|u_m\|^2 + \|a(x, t)\|_\infty \|u_m\|_{L^2(0,1)}^2 + \|a_x(x, t)\|_\infty (x, u_m^2) + \frac{c_\chi}{18} \|u_m\|_{L^2(0,1)}^4,$$

$t \in [0, t_m)$ кезінде $(0, t)$ аралығында интегралдасак

$$\begin{aligned} (x, u_m^2) + \int_0^t \|u_{mx}\|^2(s) ds &\leq (x, u_m^2)(0) + \|a(x, t)\|_\infty \|u_m\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \\ &+ \frac{C_2}{18} \|u_m\|_{L^4(0, T; L^2(0, 1))}^4 + \|a_x(x, t)\|_\infty \int_0^T (x, u_m^2)(s) ds \end{aligned}$$

бағалуын аламыз. Бірінші бағалаудың негізінде оң жақ бөліктегі екінші және үшінші мүшелердің шектелгені анықталды. Сондай-ақ, сол бағалау кезіндегідей $\|u_m\|(0) \leq c_1$. Онда

$$(x, u_m^2) + \int_0^t \|u_{mx}\|^2(s) ds \leq c_3 + c_2 \int_0^T (x, u_m^2)(s) ds$$

орындалатындай, $c_3 > 0$ болатын оң тұрақты табылады, мұндағы $c_3 = c_1 + \|a(x, t)\|_\infty \|u_m\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 + \frac{C_2}{18} \|u_m\|_{L^4(0, T; L^2(0, 1))}^4$. Гронуолл теңсіздігін қолданып әрі бірінші бағалауды пайдалана отырып

$$u_m \in L^\infty(L^2(0, 1); (0, T)), \quad u_{m_x} \in L^2(L^2(0, 1); (0, T)) \quad \text{онда} \quad u_m \in L^2(H_0^1(0, 1); (0, T)) \quad (2.2.15)$$

аламыз.

Үшінші бағалау. Бағалауды алу үшін (2.2.8) теңдеуін $\frac{1}{b_2(t)}$ өрнегіне көбейтіп,

$$\text{уақыт бойынша туынды алып және } a_1(t) = \frac{1}{b_2(t)}, a_2(x, t) = \frac{1}{b_2(t)} a(x, t) \text{ және } a_3(t) = \frac{b_1(t)}{b_2(t)}$$

белгілеулерін қолдансақ

$$\begin{aligned} a_1(t)(u_{m_t}, w) + a_1'(t)(u_{m_t}, w) - (a_2(x, t)u_{m_{xt}}, w) - (a_{2t}(x, t)u_{m_x}, w) \\ + a_3(t)\left((u_m u_{m_x})_t, w\right) + a_3'(t)(u_m u_{m_x}, w) - (u_{m_{xxt}}, w_x) = 0. \end{aligned}$$

Келесі кезекте, $w = 2(x+1)u_{m_t}$ деп алсақ,

$$\begin{aligned} 2a_1(t)(u_{m_t}, (x+1)u_{m_t}) + 2a_1'(t)(u_{m_t}, (x+1)u_{m_t}) - 2(a_2(x, t)u_{m_{xt}}, (x+1)u_{m_t}) \\ - 2(a_{2t}(x, t)u_{m_x}, (x+1)u_{m_t}) + 2a_3(t)\left((u_m u_{m_x})_t, (x+1)u_{m_t}\right) \\ + 2a_3'(t)(u_m u_{m_x}, (x+1)u_{m_t}) - 2(u_{m_{xxt}}, ((x+1)u_{m_t})_x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

(2.2.16) теңдігіндегі әр мүшені барлық $t \in [0, T]$ үшін талдаймыз. II-бағалаудағы сияқты тәсілді қолдана отырып,

$$\begin{aligned}
2a_1(t)(u_{m_t}, (x+1)u_{m_t}) &= a_1(t) \frac{d}{dt} \|u_{m_t}\|^2 + a_1(t) \frac{d}{dt} \int_0^1 u_{m_t}^2 x dx, \\
2a_1'(t)(u_{m_t}, (x+1)u_{m_t}) &= 2a_1'(t) \|u_{m_t}\|^2 + 2a_1'(t) \int_0^1 u_{m_t}^2 x dx, \\
-2(a_2(x, t)u_{m_{xt}}, (x+1)u_{m_t}) &= -\int_0^1 a_2(x, t)(x+1) \left(u_{m_t}^2 \right)_x dx \\
&= \int_0^1 a_{2x}(x, t)(x+1)u_{m_t}^2 dx + \int_0^1 a_2(x, t)u_{m_t}^2 dx = (a_{2x}(x, t) + a_2(x, t), u_{m_t}^2) \\
|2(a_{2t}(x, t)u_{m_x}, (x+1)u_{m_t})| &\leq 4\|a_{2t}\|_\infty (|u_{m_x}|, |u_{m_t}|) \leq 2\|a_{2t}\|_\infty (\|u_{m_x}\| + \|u_{m_t}\|), \\
-2(u_{m_{xxt}}, \left((x+1)u_{m_t} \right)_x) &= -2(u_{m_{xxt}}, (x+1)u_{m_{xt}} + u_{m_t}) \\
&= -\int_0^1 \left(u_{m_{xt}}^2 \right)_x (x+1) dx + 2 \int_0^1 u_{m_{xt}}^2 dx = \\
&= -u_{m_{xt}}^2 (x+1) \Big|_{x=0}^{x=1} + 3 \int_0^1 u_{m_{xt}}^2 dx = u_{m_{xt}}^2(0, t) + 3 \int_0^1 u_{m_{xt}}^2 dx \\
a_3'(t)(u_m u_{m_x}, (x+1)u_{m_t}) &\leq c_4 \|u_m\|_\infty (u_{m_x}, u_{m_t}) \leq \frac{c_4}{2} \|u_m\|_\infty (\|u_{m_x}\| + \|u_{m_t}\|)
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Енді $2a_3(t)(u_m u_{m_x})_t, (x+1)u_{m_t})$ мүшесін қарастырайық

$$\begin{aligned}
2a_3(t)((u_m u_{m_x})_t, (x+1)u_{m_t}) &\leq \\
&\leq 2a_3(t) \left(\int_0^1 u_{m_t}^2 (x+1) |u_{m_x}| dx + \left| \int_0^1 u_m u_{m_t} (x+1) u_{m_{xt}} dx \right| \right).
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Енді (2.2.18)-теңдеудің оң жағын жеке-жеке талдайық.

$$\begin{aligned}
2a_3(t) \int_0^1 u_{m_t}^2 (x+1) |u_{m_x}| dx &\leq c_5 \|u_{m_t}\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 |u_{m_t}| |u_{m_x}| dx \leq c_6 \|u_{m_{xt}}\|_{L^2(0,1)} \int_0^1 |u_{m_t}| |u_{m_x}| dx \\
&\leq \|u_{m_{xt}}\|_{L^2(0,1)}^2 + c_7 \left(\int_0^1 |u_{m_t}| |u_{m_x}| dx \right)^2 \leq \int_0^1 |u_{m_{xt}}|^2 dx + c_8 \|u_{m_t}\|^2 \|u_{m_x}\|^2 \\
2a_3(t) \left| \int_0^1 u_m u_{m_t} (x+1) u_{m_{xt}} dx \right| &\leq c_9 \int_0^1 |u_m| |u_{m_t}| |u_{m_{xt}}| dx \leq c_9 \|u_m\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 |u_{m_t}| |u_{m_{xt}}| dx \\
&\leq \int_0^1 |u_{m_{xt}}|^2 dx + c_{10} \|u_m\|_{L^\infty(0,1)}^2 \int_0^1 |u_{m_t}|^2 dx.
\end{aligned}$$

Алынған нәтижені, (2.2.18) бағалауға қойсақ

$$\begin{aligned} & 2a_3(t)((u_m u_{m_x})_t, (x+1)u_{m_t}) \\ & \leq \int_0^1 |u_{m_{xt}}|^2 dx + c_8 \|u_{m_t}\|^2 \|u_{m_x}\|^2 + \int_0^1 |u_{m_{xt}}|^2 dx + c_{10} \|u_m\|_{L^\infty(0,1)}^2 \int_0^1 |u_{m_t}|^2 dx. \end{aligned}$$

(2.2.16) теңдікке (2.2.17) және (2.2.19) теңсіздігін қойып,

$$\begin{aligned} a_1(t) \frac{d}{dt} \left(\|u_{m_t}\|^2 + \int_0^1 u_{m_t}^2 x dx \right) + \int_0^1 |u_{m_{xt}}|^2 dx + u_{m_{xt}}^2(0, t) & \leq \\ & \leq c_{11} \int_0^1 |u_{m_t}|^2 x dx + \left(c_{12} + c_8 \|u_{m_x}\|^2 + c_{10} \|u_m\|_{L^\infty(0,1)}^2 \right) \|u_{m_t}\|^2 \leq \\ & \leq \left(c_7 + c_{12} + c_8 \|u_{m_x}\|^2 + c_{10} \|u_m\|_{L^\infty(0,1)}^2 \right) \left(\|u_{m_t}\|^2 + \int_0^1 |u_{m_t}|^2 x dx \right). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Сәйкесінше, $\chi(t) = \|u_{m_t}\|^2 + \int_0^1 |u_{m_t}|^2 x dx$ және $g(t) = c_7 + c_{12} + c_8 \|u_{m_x}\|^2 + c_{10} \|u_m\|_{L^\infty(0,1)}^2$ деп белгілесек, онда (2.2.20) бағалауы

$$\chi'(t) + \int_0^1 |u_{m_{xt}}|^2 dx + u_{m_{xt}}^2(0, t) \leq g(t) \chi(t) \quad (2.2.21)$$

түрінде болады. $(0, t)$ аралығында интегралдасақ

$$\chi(t) + \int_0^t \|u_{m_{xt}}\|^2 dt + \int_0^t u_{m_{xt}}^2(0, s) ds \leq \chi(0) + \int_0^t g(s) \chi(s) ds. \quad (2.2.22)$$

$\chi(0) = \hat{c}$ гипотезасы, $g(t) \geq 0$ және екінші бағалу бойынша $\int_0^T g(s) ds \leq c_{13}$, яғни бұл шама m -ге тәуелсіз, барлық $t \in [0, T]$ үшін орындалады. (2.2.22) бағалауына Гронуолл теңсіздігін қолдансақ $\chi(t) \leq \hat{c}$ m -ге тәуелсіз, барлық $t \in [0, T]$ үшін орындалады. Осыдан

$$u_{m_t} \in L^\infty(L^2(0,1);(0,T)), u_{m_{xt}} \in L^2(L^2(0,1);(0,T)) \text{ онда } u_{m_t} \in L^2(H_0^1(0,1);(0,T)). \quad (2.2.23)$$

Төртінші бағалау. Біз $u_m u_{m_x} \in L^{4/3}(L^{4/3}(0,1);(0,T))$ кеңістігінен екенін көрсетеміз. Шын мәнінде, егер $t \in [0, T]$ екітіп, Коши-Шварц теңсіздігін қолдансақ

$$\|u_m u_{m_x}\|_{L^2(0,1)} \leq c \|u_m\|_{H_0^1(0,1)} \|u_{m_x}\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{c}{2} \left(\|u_m\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|u_{m_x}\|_{L^2(0,1)}^2 \right).$$

Одан кейін $[0, T]$ интегралдасак

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_m u_{m_x}\|_{L^2(0,1)}(t) dt &\leq \frac{c}{2} \left(\int_0^T \|u_m\|_{H_0^1(0,1)}^2(t) dt + \int_0^T \|u_{m_x}\|_{L^2(0,1)}^2(t) dt \right) \\ &\leq \frac{c}{2} \left(\|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))}^2 + \|u_{m_x}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right) \leq C \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

яғни $u_m u_{m_x} \in L^1(L^2(0,1);(0,T))$ және m -ге тәуелсіз. Сонымен қатар, $u_m \in L^\infty(L^2(0,1);(0,T))$, $u_{m_x} \in L^2(L^2(0,1);(0,T))$ болғандықтан

$$u_m u_{m_x} \in L^2(0,T;L^1(0,1)) \quad m \text{-ге тәуелсіз.} \quad (2.2.24)$$

Айталық $w = |u_m u_{m_x}|$ болсын. Онда

$$\|w\|_{L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(0,1))}^{4/3} = \int_0^T \int_0^1 |w|^{4/3} dx dt = \int_0^T \left(\int_0^1 |w|^{2/3} |w|^{2/3} dx \right) dt.$$

Гёльдер теңсіздігін $p = 3/2$, $p' = 3$ болатындай қолдансақ,

$$\|w\|_{L^{4/3}(L^{4/3}(0,1);(0,T))}^{4/3} \leq \int_0^T \left(\int_0^1 |w| dx \right)^{2/3} \left(\int_0^1 |w|^2 dx \right)^{1/3} dt.$$

Юнг теңсіздігін $ab \leq a^{p'}/p' + b^p/p$ жағдайында және (2.2.24), (2.2.25) бағалауларын қолдансақ

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^{4/3}(L^{4/3}(0,1);(0,T))}^{4/3} &\leq \frac{1}{3} \int_0^T \left(\int_0^1 |w| dx \right)^2 dt + \frac{2}{3} \int_0^T \left(\int_0^1 |w| dx \right)^2 \left(\int_0^1 |w|^2 dx \right)^{1/2} dt \\ &\leq \frac{1}{3} \|w\|_{L^2(L^1(0,1);(0,T))}^2 + \frac{2}{3} \|w\|_{L^1(L^2(0,1);(0,T))}^2 < c. \end{aligned}$$

бағалауын аламыз. Осындан $u_m u_{m_x} \in L^{4/3}(L^{4/3}(0,1);(0,T))$.

Бесінші бағалау. (2.2.8) теңдеуінде $w = u_{m_x}$ деп алсақ, барлық $t \in [0, T]$ үшін төмендегі бағалау шығады

$$\|u_{m_{xx}}\|_{L^2(0,1)}^2 \leq (\|u_{m_t}\| + b_1(t)\|u_m u_{m_x}\| + \|a(x,t)\|_\infty \|u_{m_x}\|) \|u_{m_x}\|.$$

Алдыңғы алынған бағалаулар бойынша $\{u_m, u_{m_x}, u_{m_t}, u_{m_{xt}}\} \in L^2(L^2(0,1); (0,T))$, $u_m u_{m_x} \in L^1(L^2(0,1); (0,T))$ сондықтан $\|u_{m_x}\|_{L^\infty(L^2(0,1); (0,T))}$. Онда

$$\|u_{m_{xx}}\|_{L^2(0,1)}^2 \leq F(t) \|u_{m_x}\|_{L^\infty(L^2(0,1); (0,T))},$$

мұндағы $F(t) = \|u_{m_t}\| + b_1(t)\|u_m u_{m_x}\| + \|a(x,t)\|_\infty \|u_{m_x}\|$. $t \in [0, T]$ аралығында интегралдасақ және $F(t) \in L^1(0, T)$ болғандықтан $u_{m_{xx}} \in L^2(L^2(0,1); (0,T))$ аламыз.

Жуықталған жүйенің жинақтылығы. Алынған 1-5 бағалаулары (2.2.8)-теңдеудің сызықтық мүшелері бойынша $m \rightarrow \infty$ шегіне көшуге жеткілікті. Шын мәнінде, бағалаулардан біз

$$u_m \rightarrow u \text{ әлсіз жинақталады } L^2(H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1); (0,T)) \text{ де,} \quad (2.2.26)$$

$$u_{m_t} \rightarrow u_t \text{ әлсіз жинақталады } L^2(H_0^1(0,1); (0,T)) \text{ де,}$$

орындалатындай $\{u_m\}_{m \in N}$ іш тізбегін ала аламыз. Сонымен қатар, $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \hookrightarrow H_0^1(0,1)$ инекциясы үзіліссіз болғандықтан $u \in C^0(H_0^1(0,1); [0, T])$ және $u(x, 0) = u_0(x)$.

Шешімнің жалғыздығы. Айталық $u_1(x, t)$ және $u_2(x, t)$ функциялары (2.2.6) есептің екі шешімі болсын, онда $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ функциясы

$$\begin{cases} v_t - a(x, t)v_x + \frac{b_1(t)}{2}[(u_1 + u_2)v]_x + b_2(t)v_{xxx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ v(0, t) = v(1, t) = v_x(1, t) = 0, & t \in [0, T] \\ v(x, 0) = 0, & \forall x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.2.27)$$

Енді (2.2.27) теңдеуді $e^x v$ -ға көбейтіп, $(0, 1)$ аралығында интегралдау амалын қолдансақ, әрбір мүше үшін төмендегілер орындалады

$$\begin{aligned} (e^x v, v_t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^x, v^2), \\ \frac{1}{2} (e^x v, [(u_1 + u_2)v]_x) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^x v v_x (u_1 + u_2) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 e^x v^2 (u_1 + u_2) dx, \end{aligned}$$

$$b_2(t) \int_0^1 e^x v v_{xxx} dx = b_2(t)(v_x^2(0,t) + 3(e^x, v_x^2) - (e^x, v^2)),$$

$$(a(x,t)e^x v v_x) = -\frac{1}{2}(a_x(x,t)e^x, v^2) - \frac{1}{2}(a(x,t)e^x, v^2) \leq \max(\|a\|_\infty, \|a_x\|_\infty)(e^x, v^2).$$

Алынған нәтижені, (2.2.27) теңдеуге қойсақ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(e^x, v^2) - \frac{b_1(t)}{2} \int_0^1 e^x v v_x (u_1 + u_2) dx - \frac{b_1(t)}{2} \int_0^1 e^x v^2 (u_1 + u_2) dx + b_2(t)(v_x^2(0,t) \\ + 3(e^x, v_x^2) - (e^x, v^2)) \leq \max(\|a\|_\infty, \|a_x\|_\infty)(e^x, v^2) \end{aligned}$$

орынды. Бейсызықты мүшесіне бөліктеп интегралдау және элементар теңсіздікті пайдалану нәтижесінде келесі теңсіздікті

$$\begin{aligned} -\frac{b_1(t)}{2} \int_0^1 e^x v v_x (u_1 + u_2) dx \leq b_1(t) \|u_1 + u_2\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 e^x |v v_x| dx \leq \varepsilon M(e^x, v_x^2) + \frac{M}{4\varepsilon}(e^x, v^2) \\ -\frac{b_1(t)}{2} \int_0^1 e^x v^2 (u_1 + u_2) dx \leq b_1(t) \|u_1 + u_2\|_{L^\infty(0,1)} (e^x, v^2) \leq M(e^x, v^2) \end{aligned}$$

береді, мұндағы $M = b_1(t) \|u_1 + u_2\|_{L^\infty(0,1)}$ және ε қолайлы таңдалатын оң тұрақты шама. Ауыстыру және қайта реттеу арқылы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(e^x, v^2) + b_2(t) v_x^2(0,t) + (3b_2(t) - \varepsilon M)(e^x, v_x^2) \\ \leq \left(\max(\|a\|_\infty, \|a_x\|_\infty) + b_2(t) + M + \frac{M}{4\varepsilon} \right) (e^x, v^2). \end{aligned}$$

Келесі кезекте, ε параметрін $\varepsilon < 3b_2(t)/M$ ретінде таңдап алсақ, онда

$$\frac{d}{dt}(e^x, v^2) + b_2(t) v_x^2(0,t) + (e^x, v_x^2) \leq C(e^x, v^2)$$

бағалауын аламыз. Осы бағалауды $(0, T)$ уақыт айнымалысына қатысты интегралдасақ және сол жағындағы екі мүшенің теріс емес деп ұйғарсақ

$$(e^x, v^2) \leq C \int_0^T (e^x, v^2) dt.$$

Осылайша, Гронуолл леммасын қолдана отырып, $(e^x, v^2) = 0$ аламыз, бұл $\|v\| = 0$ дегенді білдіреді. Демек, $v = 0, \forall t \in [0, T]$. Яғни, (2.2.8) есептің шешімінің жалғыздығы дәлелденді. Осымен Теорема 2.1 толық дәлелденді.

2.3 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег–де Фриз теңдеуінің сандық шешімдері

Бұл бөлімде (2.2.5) жүйесіне Галеркин әдісін қолданамыз. Осы мақсатта (2.2.5) жүйесінің бірінші теңдеуін $\omega(x) \in H_0^1(0,1)$ функциясына көбейтіп, $(0,1)$ аралығында x – бойынша интегралдау нәтижесінде төмендегі вариациялық формуланы аламыз

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \omega dx - \int_0^1 a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \omega dx + b_1(t) \int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial x} \omega dx + b_2(t) \int_0^1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \omega dx = 0. \quad (2.3.1)$$

Галеркин әдісін қолдану үшін V кеңістігін анықтайық. Ол үшін $V \subset H_0^1(Q)$ болсын. Осы кеңістіктің V_m ішкеңістігі $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \dots\}$ базистік функциялары арқылы құрылсын, яғни

$$V_m = \text{span}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}.$$

Егер $u_m(x, t) \in V_m$ функциясын қарастырсақ, онда бұл функцияны аталған базис бойынша келесі түрде жіктеуге болады

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m. \quad (2.3.2)$$

Енді (2.3.1) теңдеуін V_m – ішкеңістігінде қарастырамыз. Ол үшін (2.3.2) жіктелуін теңдеуге қойып, $\omega = \varphi_j(x), j = 1, \dots, m$ деп қарастырып, бөліктеп интегралдау нәтижесінде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m c_i'(t) \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx + b_1(t) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m c_i(t) c_k(t) \int_0^1 \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_j dx \\ - \sum_{i=1}^m c_i(t) \int_0^1 a(x, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j dx - b_2(t) \sum_{i=1}^m c_i(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \varphi_j dx = 0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Енді (2.3.3) теңдеуінің әрбір мүшесін матрицалар және үшінші ретті тензор түрінде анықтайық. Сонда келесі интегралдық матрицаларды аламыз

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx, \quad B_{ij}(t) = \int_0^1 a(x, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j dx,$$

$$C_{ikj} = \int_0^1 \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_j dx, \quad D_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx,$$

мұндағы C_{ikj} – үшінші ретті тензор, ал қалғандары $m \times m$ өлшемді матрицалар. Осылайша, (2.3.1) теңдеуін жоғарыдағы матрицалар мен үшінші ретті тензорды пайдалана отырып қайта жазғанда, төмендегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{cases} A_{ij} c'(t) + G_{ij}(t) c(t) + b_1(t) C_{ikj} c^2(t) = 0, \\ c(0) = c_0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

мұндағы $c(t) = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t)]^T$ белгісіз вектор-функциясы, ал $G_{ij}(t) = -B_{ij}(t) - b_2(t) D_{ij}$.

2.3.1 Уақыт бойынша дискретизация

Матрицалық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі (2.3.4) коэффициенттердің уақытқа тәуелділігінен аналитикалық түрде шешілуі қиынға түседі. Осы себепті, (2.3.4) теңдеуін жуықтап шешу үшін уақыт бойынша Кранк-Николсон ақырлы-айырым әдісін [41] қолданамыз.

Функцияны уақыт бойынша дискретизациялау үшін, $[0, T]$ аралығында келесі торды анықтайық

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Осылайша, (2.3.4) теңдеуіндегі $c(t)$ -векторының t_n уақыт мезетіндегі мәнін $c^n = c(t_n)$ түрінде белгілейміз.

Кранк-Николсон әдісін қолданар алдында, біз C_{ikj} тензорын сызықты түрге келтіріп аламыз. Осыдан кейін біз (2.3.4) теңдеулер жүйесін шешеміз, яғни бейсызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесін жуықталған сызықтық теңдеулер жүйесіне айналдырамыз.

Бұл үшін $C_{ij}(t) = (C_{ikj} d_k(t))$ матрицаларын қарастырайық, әрбір $k = 1, \dots, m$ үшін барлық матрицаның өлшемі $m \times m$. Осы түрде, (2.3.3) теңдеуіндегі тензорды келесі түрде аламыз

$$C_{ikj} c^2(t) = (C_{ikj} c_k(t)) c_i(t) = C_{ij}(t) c_i(t).$$

Дискретті t_n уақыт мезетінде жуықтау

$$c'_i(t_n) = \frac{1}{\Delta t}(c_i^{n+1} - c_i^n) \text{ және } c_i(t_n) = \frac{1}{2}(c_i^{n+1} + c_i^n) \quad (2.3.5)$$

түрде алынады. Осы ақырлы-айырым схемасы бойынша барлық $i, j = 1, \dots, m$ үшін

$$A_{ij}(\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t}) + (G_{ij}^n + b_1 C_{ij}^n)(\frac{c_i^{n+1} + c_i^n}{2}) = 0 \quad (2.3.6)$$

орынды. Осылайша (2.3.6) айырым схемасынан барлық $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ үшін біз келесі итерациялық схеманы аламыз

$$(A_{ij} + \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^n) c_i^{n+1} = (A_{ij} - \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^n) c_i^n, \quad (2.3.7)$$

мұндағы $J_{ij}^n = G_{ij}^n + b_1(t) C_{ij}^n$.

2.3.2 В-сплайндармен жуықтау

(2.3.7) итерацияның матрицаларын есептеу үшін $\varphi_i(x) \in V_m$ базистік функциясын енгізуіміз қажет. Ақырлы элементтер әдісінде базистік функциялар $(0,1)$ интервалында белгілі бір дәрежедегі бөлік-көпмүшеліктер болып табылады және $(0,1)$ шекарасында нөлге тең болады. Нақтырақ айтқанда, (2.3.3)-де анықталған D_{ij} матрицасына байланысты біз V_m кеңістігінің базис функциясы ретінде кубтық В-сплайндарды қолдандық. Енді кубтық В-сплайнды анықтайық:

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})^3}{4h^3}, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{1}{4} + \frac{3(x - x_{i-1})}{4h} + \frac{3(x - x_{i-1})^2}{4h^2} - \frac{3(x - x_{i-1})^3}{4h^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{1}{4} + \frac{3(x_{i+1} - x)}{4h} + \frac{3(x_{i+1} - x)^2}{4h^2} - \frac{3(x_{i+1} - x)^3}{4h^3}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{(x_{i+2} - x)^3}{4h^3}, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & x \notin (x_{i-2}, x_{i+2}), \end{cases}$$

мұндағы түйін нүктелер біркелкі орналастырылған, олардың ара қашықтығы $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, m$, $x_0 = 1$ және $x_m = 1$. $B_1(x), \dots, B_m(x)$ В-сплайндарды базистік функциялар $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ түрінде таңдаймыз. Алайда $B_1(x), B_2(x), B_{m-1}(x), B_m(x)$

функциялары шекаралық шарттарды қанағаттандырмағандықтан біз базистік функцияларды келесі түрде таңдаймыз

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = B_i(x), i = 3, \dots, m-2, \\ \varphi_1(x) = 0, \\ \varphi_2(x) = B_0(x) - \frac{1}{2} B_1(x) + B_2(x), \\ \varphi_{m-1}(x) = B_{m+1}(x) - \frac{1}{2} B_m(x) + B_{m-1}(x), \\ \varphi_m(x) = 0. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Осы $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ базистік функцияларын пайдалана отырып, (2.3.3) теңдеуінің барлық матрицаларын есептеуге болады, осылайша (2.3.6) сызықтық жүйесін шешуге болады. Егер $|i - j| > 3$ болса, онда $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0$. Сонымен қатар, барлық дискретті уақыт $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$ үшін барлық матрицалар сингулярлы емес екенін байқау қиын емес. (2.3.2) бойынша шешім

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m$$

екені белгілі. $c^0 = (c_1^0, \dots, c_m^0)$ бастапқы шарт бойынша, (2.3.6) итерациясын $n = 0$ үшін есептесек

$$(A_{ij} + \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^0) c_i^1 = (A_{ij} - \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^0) c_i^0, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (2.3.9)$$

сызықты теңдеулер жүйесін аламыз. (2.3.9) сызықтық жүйені шешу арқылы $c^1 = (c_1^1, \dots, c_m^1)$ векторын аламыз. Содан кейін, $n = 1, \dots, N$ үшін дәл осылай барлық $t_n = n\Delta t$ уақытта $c^n = (c_1^n, \dots, c_m^n)$ шамалары итерациялық әдіспен анықталады.

2.3.3 Сандық шешім

Осы бөлімнің басты мақсаты – жуық шешімді сандық әдістер арқылы есептеп, сандық модельдеуді пайдалана отырып, теориялық зерттеулеріміздің дұрыстығын растау. Барлық есептеулер MATLAB және Python бағдарламаларында жүргізілді.

Алдымен, (2.2.5) есебінің $f(\xi, \tau)$ сыртқы күштің бар екенін болжап, оны шешу үшін қолданылатын алгоритмнің сапасын тексерейік. Сәйкес $f(\xi, \tau)$ сыртқы күшті таңдау арқылы (2.2.5) есебінің айқын шешімін аламыз. Содан кейін айқын шешімді жуықталған шешім арасындағы қателікті есептей аламыз.

Сонымен қатар, (2.2.5) есеп үшін сәйкес сыртқы күш $f(\xi, \tau)$ үшін Γ түрлендіруін пайдаланып $g(x, t)$ арқылы белгілейміз.

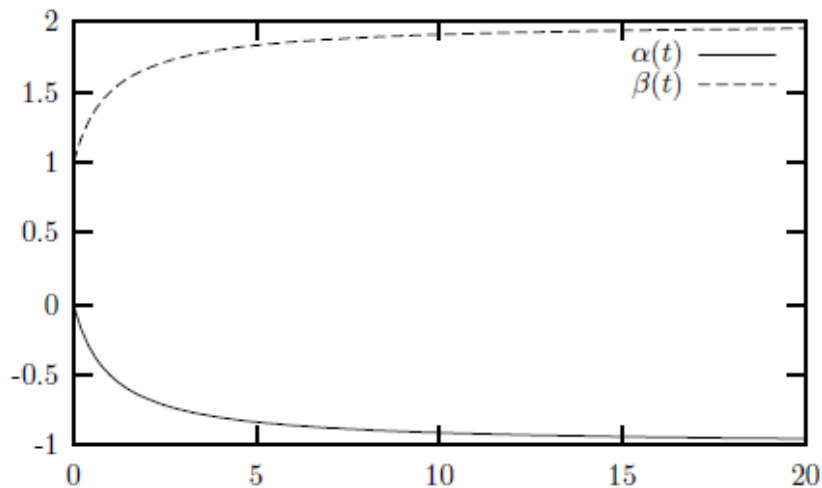
Біртекті емес келесі жүйені қарастырайық

$$\begin{cases} u_t - a(x, t)u_x + b_1(t)uu_x + b_2(t)u_{xxx} = g(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(0, t) = u(1, t) = u_x(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.3.10)$$

егер $g(x, t) = 0$, болса (2.2.5) есебіне келеміз.

1-мысал. Осы мысалда (2.3.10) теңдеуін шешуге қажетті шекаралық функциялар, сыртқы күш функциясы және бастапқы шарттар қарастырылады. Алдымен Q_τ облысының шекаралық функциялары $\alpha(t)$ және $\beta(t)$ келесі түрде аламыз

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \text{ және } \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1} \text{ онда } \gamma(t) = \frac{3t+1}{t+1}. \quad (2.3.11)$$



2.3.1 сурет. Шекаралық функциялардың қозғалысы.

Осыдан $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = -1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 2$ және $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 3$. Ал бастапқы функциясы $u_0(x) = x^2(1-x)^2$ және $g(x, t)$ сыртқы күш функциясы келесі түрде берілсін

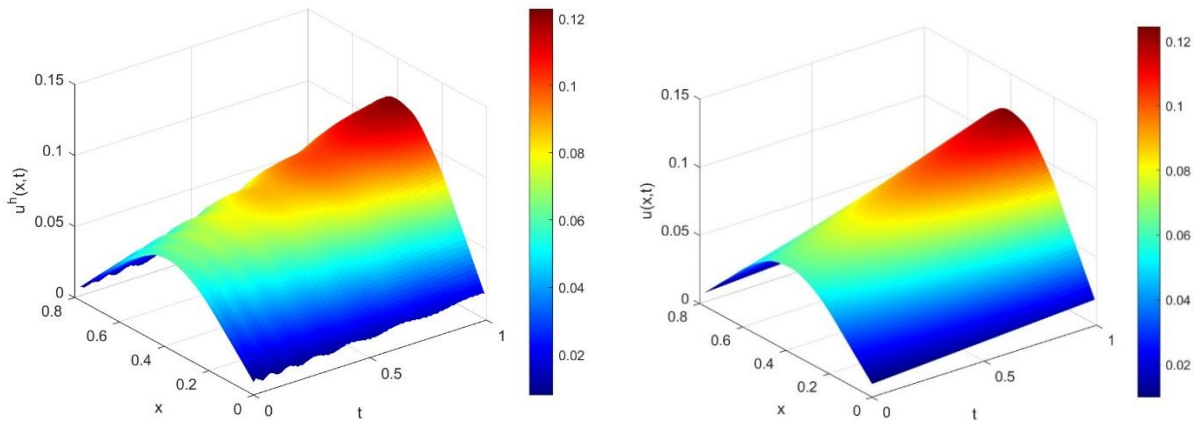
$$g(x, t) = x^4 - 2x^3 + x^2 - (a(x, t)(4x^3 - 6x^2 + 2x) - b_2(t)(24x - 12))(t+1) + b_1(t)(4x^7 - 12x^6 + 22x^5 - 10x^4 + 2x^3)(t+1)^2.$$

Осы функцияларды қолданып, (2.3.10) есептің айқын шешімі келесі түрде табылады

$$u(x,t) = x^2(1-x)^2(t+1). \quad (2.3.12)$$

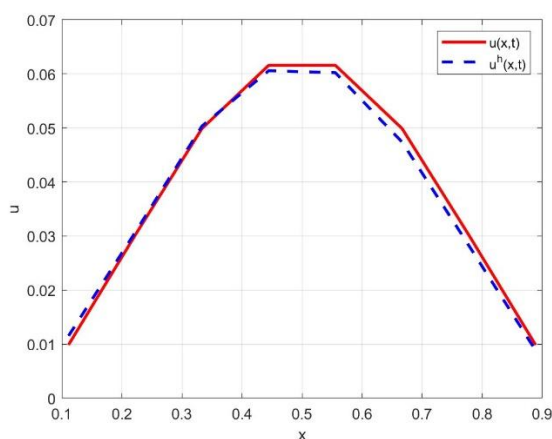
Келесі модельдеулерде сандық шешімнің нәтижелері айқын (аналитикалық) шешіммен салыстырылады. Үш түрлі модельдеу нәтижелері ұсынылады. Әрбір модельдеуде сәйкес m түйін мен N уақыт қадамы бойынша жүзеге асады.

1-ші моделдеу. Бұл моделдеуде кеңістіктік дискретизация үшін $m=10$ түйін таңдалып, уақыт қадамы $\Delta t = 0.01$ ретінде алынған ($N = 100$).

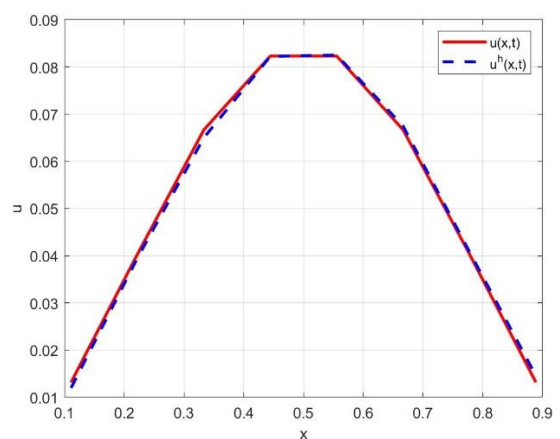


2.3.2 сурет. $m=10$ және $\Delta t = 0.01$ параметрлері үшін алынған жуықталған $u^h(x,t)$ және айқын $u(x,t)$ шешімдері.

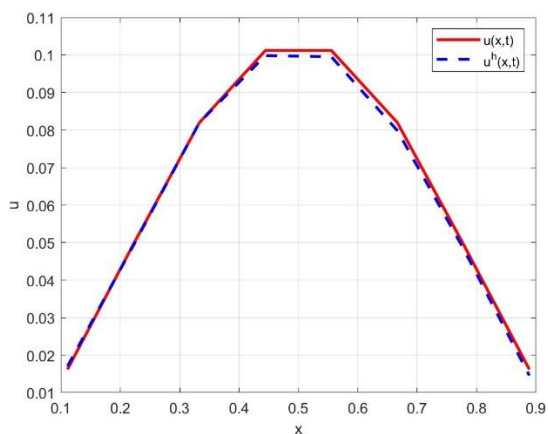
1-ші моделдеу нәтижесінде алынған қателік шамамен 10^{-3} реттілігіне сәйкес келеді. 2.3.2-суретте көрсетілгендей, тіркелген қателіктің ең үлкен мәні 0.002244-ке тең. Келесі суреттерде $m=10$ және $\Delta t = 0.01$ параметрлері үшін $u(x,t)$ айқын шешімі мен $u_m(x,t)$ жуықталған шешімінің әртүрлі уақыт сәтіндегі графиктері көрсетілген



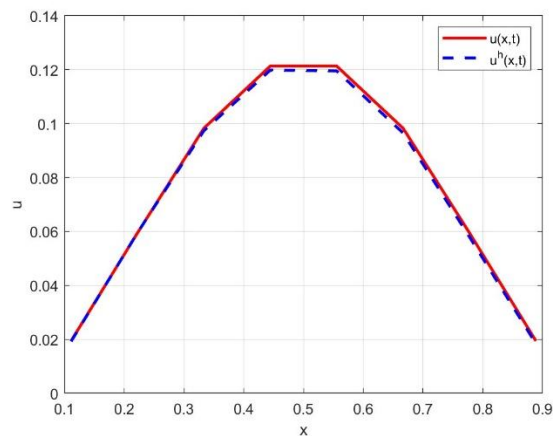
2.3.3 сурет. $t = 0.01$.



2.3.4 сурет. $t = 0.35$.

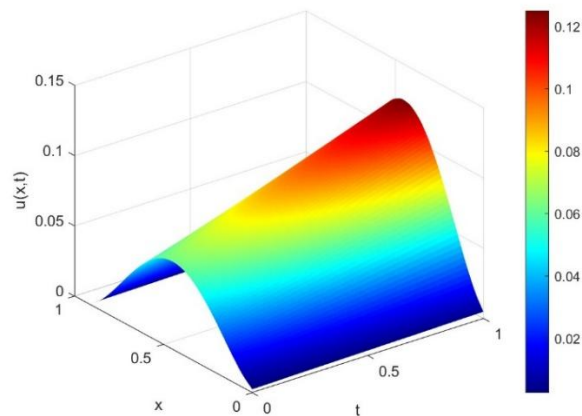
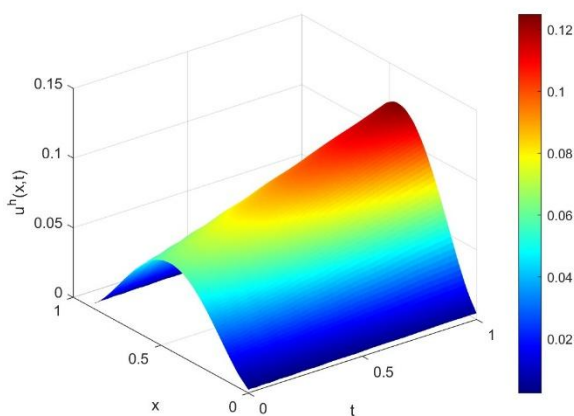


2.3.5 сурет. $t = 0.66$.



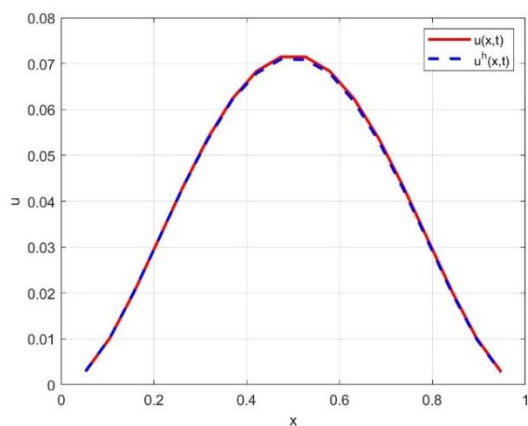
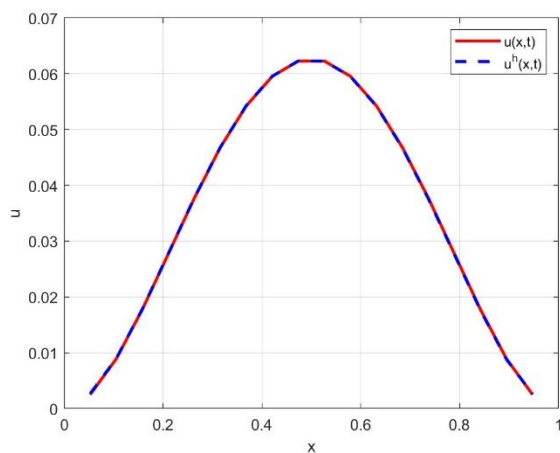
2.3.6 сурет. $t = 0.99$.

2-ші моделдеу. Осы моделдеуде кеңістіктік дискретизация үшін $m = 20$ түйін таңдалып, уақыт қадамы $\Delta t = 0.002$ ретінде алынған ($N = 500$).

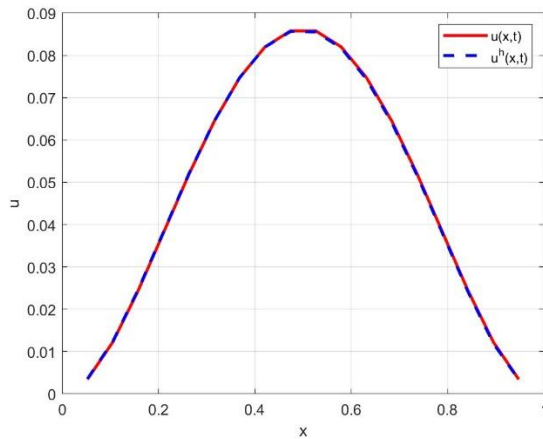


2.3.7 сурет. $m = 20$ және $\Delta t = 0.002$ параметрлері үшін алынған жуықталған $u_m(x,t)$ және айқын $u(x,t)$ шешімдері.

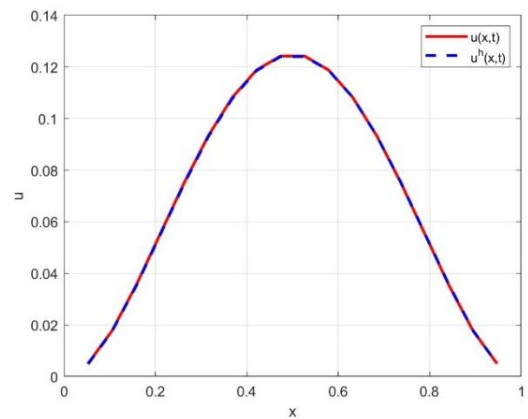
2-ші моделдеу нәтижесінде алынған қателік шамамен 10^{-4} реттілігіне сәйкес келеді. 2.3.7-суретте көрсетілгендей, тіркелген қателіктің ең үлкен мәні 0.000464-ке тең. Келесі суреттерде $m = 20$ және $\Delta t = 0.002$ параметрлері үшін $u(x,t)$ айқын шешімі мен $u_m(x,t)$ жуықталған шешімінің әртүрлі уақыттағы графиктері көрсетілген



2.3.8 сурет. $t = 0.002$.



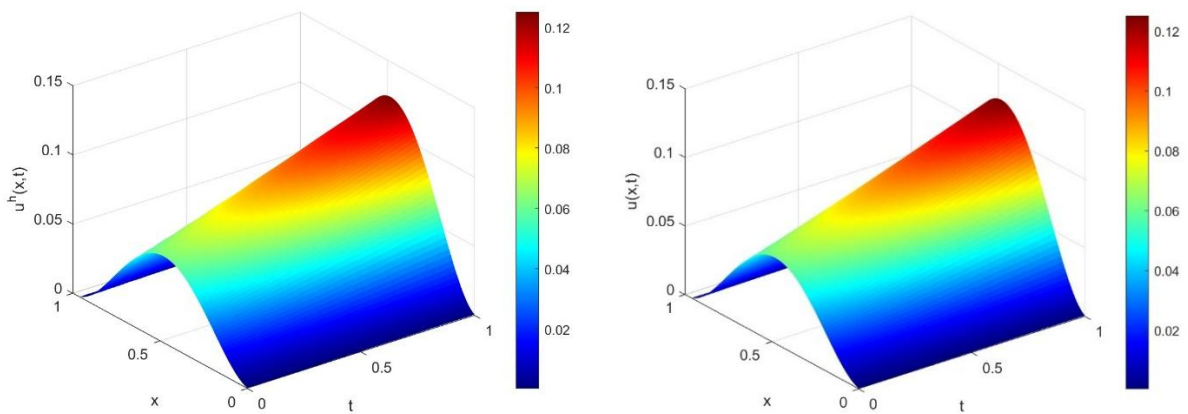
2.3.9 сурет. $t = 0.15$.



2.3.10 сурет. $t = 0.38$.

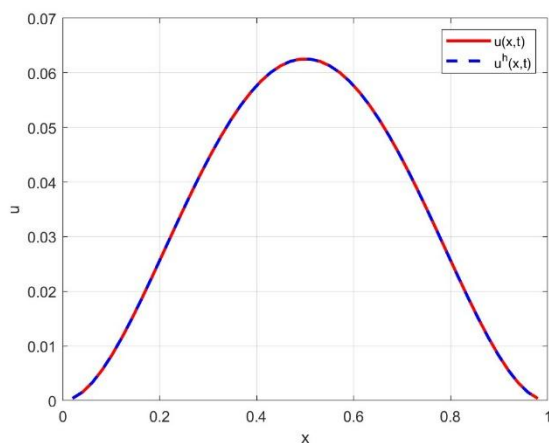
2.3.11 сурет. $t = 0.998$.

3-ші моделдеу. Берілген моделдеуде кеңістіктік дискретизация үшін $m = 50$ түйін таңдалып, уақыт қадамы $\Delta t = 0.001$ ретінде алынған ($N = 1000$).

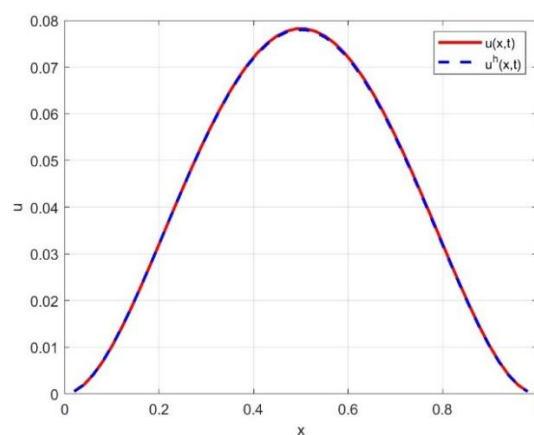


2.3.12 сурет. $m = 50$ және $\Delta t = 0.001$ параметрлері үшін алынған жуықталған $u_m(x,t)$ және айқын $u(x,t)$ шешімдері.

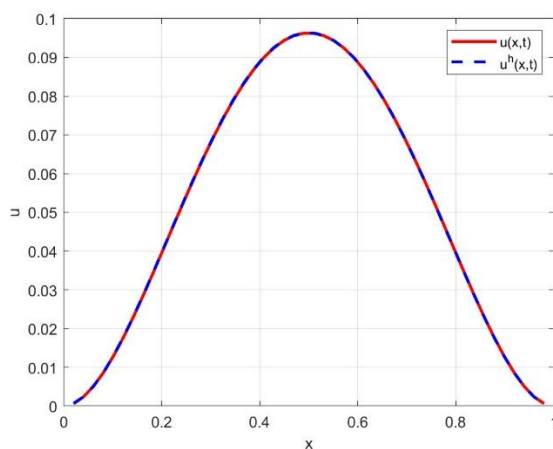
3-ші моделдеу нәтижесінде алынған қателік шамамен 10^{-4} реттілігіне сәйкес келеді. 2.3.12-суретте көрсетілгендей, тіркелген қателіктің ең үлкен мәні 0.0002289 болды. Келесі суреттерде $m = 50$ және $\Delta t = 0.001$ параметрлері үшін $u(x,t)$ айқын шешімі мен $u_m(x,t)$ жуықталған шешімінің әртүрлі уақыттағы графиктері көрсетілген



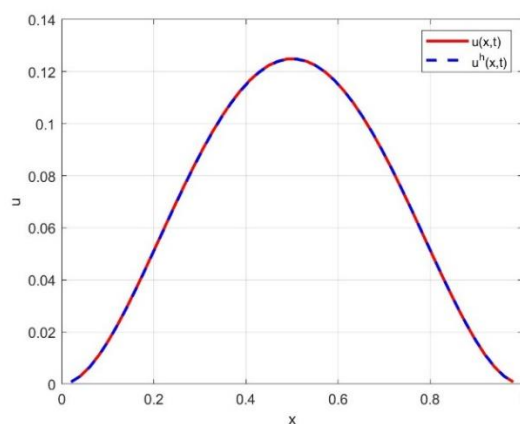
2.3.13 сурет. $t = 0.001$.



2.3.14 сурет. $t = 0.252$.



2.3.15 сурет. $t = 0.541$.



2.3.16 сурет. $t = 0.999$.

Бұл моделдеу нәтижелерінен байқайтынымыз – тордың қадамы m мен уақыт қадамы N ұлғайған сайын айқын шешім мен сандық шешімнің бір біріне жақындай түседі. Бұл тұжырымды нақтылау үшін 1-ші және 2-ші кестелерде $u_m(x,t)$ жуықталған шешім мен $u(x,t)$ айқын шешімнің арасындағы айырмашылықтың қателігі көрсетілген. Қателіктер келесі формуламен анықталады [62]

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} = \max_{t_n \in [0,T]} \left(\int_0^1 |u(x_i, t_n) - u_h(x_i, t_n)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (2.3.13)$$

$$i = 1, \dots, m, n = 0, 1, \dots, N.$$

2.1 -кесте

Δt	m	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$
0.01	10	0.002244
0.01	20	0.002181
0.01	50	0.002172
0.01	100	0.002171

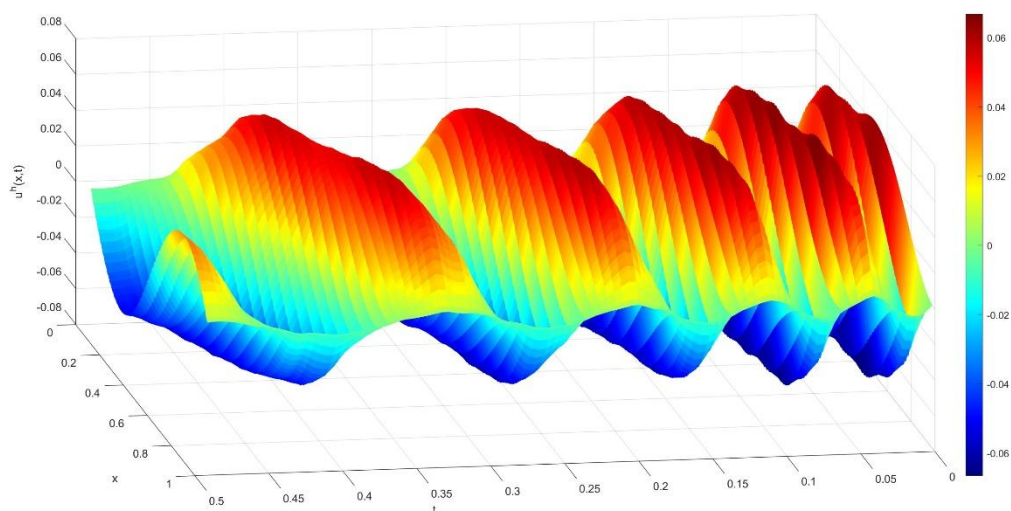
2.2 -кесте

Δt	m	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$
0.001	10	0.0004147
0.001	20	0.0002393
0.001	50	0.0002289
0.001	100	0.0002284

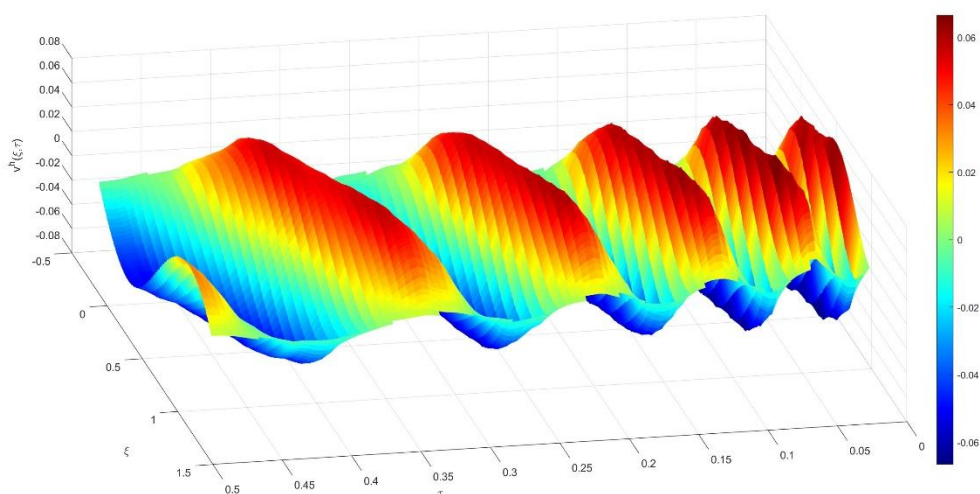
Берілген 2.1 және 2.2 кесте нәтижелері бойынша, қателіктердің m және N параметрлеріне тәуелділігін байқауға болады. Яғни, $E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$ қателіктері тор қадамы m және уақыт қадамы N ұлғайған сайын төмендейді. Кестелерде анықталған талдау нәтижелері қолданылған сандық әдістің тиімділігін растайды.

Осы әдісті сыртқы күш $g(x,t)=0$ ((2.3.10) есебінде) яғни, бастапқы есепте $f(\xi,\tau)=0$ болған жағдайда сандық шешімді анықтау үшін қолдануға болады.

Ұсынылған әдісті қолдана отырып, 2.3.17 суретте сыртқы күш $g(x,t)=0$ болған жағдайы үшін (2.3.11) шекаралық шарты мен $u_0(x)=x^2(1-x)^2$ бастапқы функциясына сәйкес (2.2.5) есебінің $u_m(x,t)$ жуық шешімі алынды. Ал 2.3.18 суретте Γ -түрлендіруі негізінде (2.2.1–2.2.3) есебінің $\vartheta_m(\xi,\tau)$ жуық шешімі табылды.



2.3.17 сурет. (2.2.5) есебінің $u^h(x,t)$ жуық шешімі.



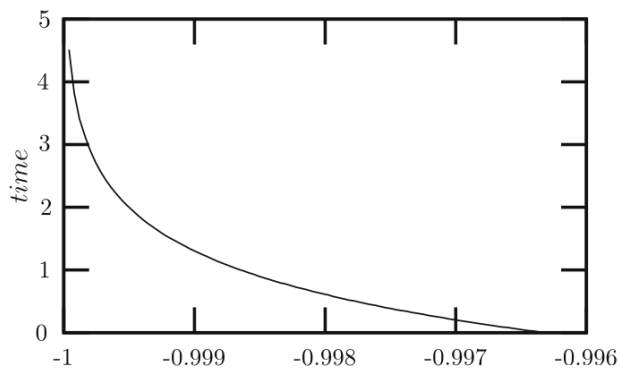
2.3.18 сурет. (2.2.1-2.2.3) есебінің $\vartheta^h(\xi,\tau)$ жуық шешімі.

2-мысал. Бұл мысалда Q_τ облысының шекаралық функциялары $\alpha(t)$ және $\beta(t)$ келесі түрде анықтайық

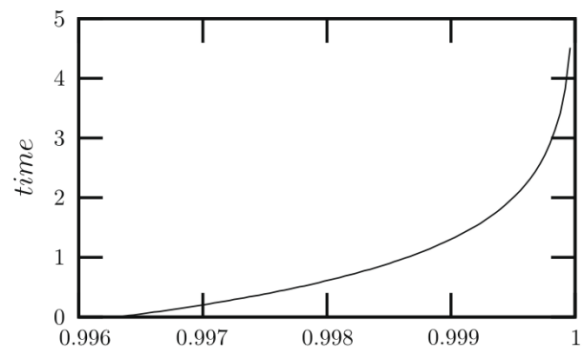
$$\alpha(\tau) = -1 + 0.01e^{-(\tau+1)} \text{ және } \beta(t) = 1 - 0.01e^{-(t+1)} \quad (2.3.14)$$

онда $\gamma(t) = 2 - 0.02e^{-(t+1)}$. Осыдан келесі шектер орындалады

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \rightarrow -1, \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) \rightarrow 1 \text{ және } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) \rightarrow 2$$



2.3.19 сурет. $\alpha(t)$ функциясы.



2.3.20 сурет. $\beta(t)$ функциясы.

Бастапқы шарт функциясы ретінде $u_0(x) = x^2(1-x)^2$ алынсын. Ал сыртқы күш функциясы $g(x, t)$ төмендегі функциямен анықталсын

$$g(x, t) = (x^4 - 2x^3 + x^2)e^t - (a(x, t)(4x^3 - 6x^2 + 2x) - b_2(t)(24x - 12))e^t + b_1(t)(4x^7 - 12x^6 + 22x^5 - 10x^4 + 2x^3)e^{2t}.$$

Осы анықталған функцияларды қолдана отырып, (2.3.10) есебінің айқын шешімін аламыз

$$u(x, t) = x^2(1-x)^2 e^t. \quad (2.3.15)$$

Енді осы мысалдағы жуық шешім $u_m(x, t)$ мен айқын шешім $u(x, t)$ арасындағы қателіктер (2.3.13) формуласымен есептелінеді. Әдістің тиімділігін бағалау үшін алынған қателік мәндері төмендегі кестелерде толық көрсетілген.

2.3 -кесте

Δt	m	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$
0.01	10	$3.258 \cdot 10^{-4}$
0.01	20	$5.124 \cdot 10^{-5}$
0.01	50	$1.033 \cdot 10^{-5}$
0.01	100	$8.711 \cdot 10^{-6}$

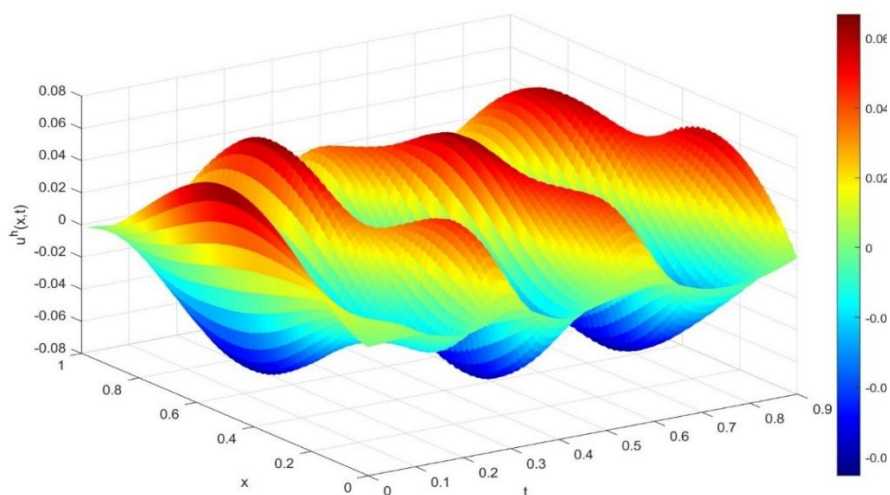
2.4 -кесте

Δt	m	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$
0.001	10	$3.141 \cdot 10^{-4}$
0.001	20	$4.834 \cdot 10^{-5}$
0.001	50	$4.439 \cdot 10^{-6}$
0.001	100	$1.113 \cdot 10^{-6}$

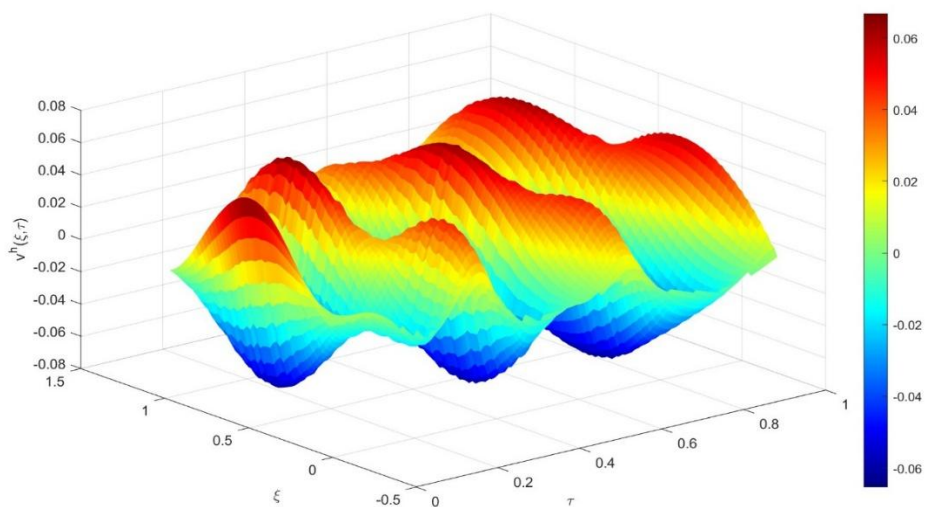
1-ші мысалдағыдай қателіктердің m және N параметрлеріне тәуелділігін байқауға болады. Яғни, $E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$ қателіктері тор қадамы m және уақыт қадамы N ұлғайған сайын төмендейді. Кестелердегі талдау нәтижелері қолданылған сандық әдістің тиімділігін растайды.

Сонымен қатар, бұл әдісті сыртқы күш $g(x,t)=0$ (яғни, бастапқы есепте $f(\xi,\tau)=0$) жағдайда сандық шешімді табуға да қолдануға болады.

1-ші мысалдағы ұсынылған әдіс бойынша 2.3.21 суретте сыртқы күш $g(x,t)=0$ жағдайында, (2.3.14) шекаралық функциялар мен $u_0(x)=x^2(1-x)^2$ бастапқы функциясымен берілген (2.2.5) есебінің $u_m(x,t)$ жуық шешімі алынды. Сонымен қатар, 2.3.22 суретте Γ -түрлендіруі арқылы (2.2.1–2.2.3) есебінің $\mathcal{G}^h(\xi,\tau)$ жуық шешімі есептелді



2.3.21 сурет. (2.2.5) есебінің $u^h(x,t)$ жуық шешімі.



2.3.22 сурет. (2.2.1-2.2.3) есебінің $\mathcal{G}_m(\xi,\tau)$ жуық шешімі.

3 ШЕКАРАСЫ ЖЫЛЖЫМАЛЫ ОБЛЫСТАҒЫ СУ ТОЛҚЫНДАРЫ: КАВАХАРА ТЕҢДЕУІ

Кавахара теңдеуі (әдебиеттерде бесінші ретті Кортевег–де Фриз теңдеуі деп те аталады) жалпы түрде келесі түрде жазылады:

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Бұл теңдеу алғаш рет Т.Кавохара тарапынан 1972 жылы [44]-жұмыста, әлсіз дисперсиялы орталардағы ұзын бейсызықты толқындардың таяз арнадағы таралуын сипаттау үшін шығарылған. Кавахара теңдеуі арқылы сипатталатын әртүрлі физикалық үдерістер мысалы, [45-52] жұмыстарында келтірілген. Айта кету керек, әртүрлі физикалық моделдерде a және b коэффициенттерінің таңбалары әртүрлі болуы мүмкін.

Бұл тарауда біз шекарасы жылжымалы облыста Кавахара теңдеуі негізінде анықталған су толқындарының моделін қарастырамыз. Бұл теңдеу дисперсиялық толқындық құбылыстарды сипаттайтын маңызды математикалық моделдер болып табылады және оларды зерттеу су толқындары, атмосфералық динамика, плазма физикасы сияқты әртүрлі қолданбалы салаларда өзекті болып табылады.

Алдымен, біз осы теңдеулердің шекарасы жылжымалы облыстағы шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығын дәлелдейміз. Одан кейін, олардың сандық шешімдерін есептеу әдістерін қарастырамыз. Біздің талдауымызда негізгі әдістер ретінде Галеркин тәсілі, мультипликатор әдістері және энергияны бағалау тәсілдері қолданылады. Бұл әдістер теңдеулердің аналитикалық құрылымын тереңірек түсінуге мүмкіндік беріп, шешімдердің тұрақтылығын және олардың уақыт бойынша эволюциясын зерттеуге негіз болады. Сонымен қатар, алынған нәтижелерді нақты физикалық процестермен салыстыра отырып, олардың қолданбалы аспектілеріне ерекше назар аударамыз.

3.1 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кавахара теңдеуі

Бұл бөлімде шекарасы

$$D_\tau = \{\xi \in R \mid \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), \tau > 0\}$$

болатын жылжымалы шекаралы

$$Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$$

облысында классикалық Кавахара теңдеуі үшін қойылған

$$\mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}\mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} - \mathcal{G}_{\xi\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.1.1)$$

бастапқы

$$\mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), \quad \xi \in D_0, \quad (3.1.2)$$

және шекаралық

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) &= \phi_1(\tau), \quad \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = \phi_2(\tau), \\ \mathcal{G}_\tau(\alpha(\tau), \tau) &= \phi_3(\tau), \quad \mathcal{G}_\tau(\beta(\tau), \tau) = \phi_4(\tau), \\ \mathcal{G}_{\tau\tau}(\beta(\tau), \tau) &= \phi_5(\tau). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

есепті қарастырамыз, мұндағы $(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau), \phi_3(\tau), \phi_4(\tau), \phi_5(\tau), \alpha(\tau), \beta(\tau)) \in C^2(0, T)$ және $0 < \alpha_0 \leq \beta(\tau) - \alpha(\tau) \leq \beta_0 < \infty, \quad \forall \tau \geq 0$.

Регулярлы шешімдерді алу үшін біз келесі үйлесімділік шарттарын қоямыз

$$\phi_1(0) = \mathcal{G}_0(\alpha(0)), \quad \phi_2(0) = \mathcal{G}_0(\beta(0)), \quad \phi_3(0) = \mathcal{G}'_0(\alpha(0)), \quad (3.1.4)$$

$$\phi_4(0) = \mathcal{G}'_0(\beta(0)), \quad \phi_5(0) = \mathcal{G}''_0(\beta(0)).$$

Осы тараудың негізгі нәтижелерін тұжырымдаймыз.

3. 1 теорема. Егер бастапқы шарт үшін $\mathcal{G}_0(x) \in H^5(D_0)$ орындалсын және (3.1.4) үйлесімділік шарттары сақталсын, онда кез келген $T > 0$ үшін (3.1.1)-(3.1.3) есебінің әлсіз шешімі бар және ол жалғыз болады. Сонымен қатар бұл шешім келесі кеңістіктерге тиесілі $\mathcal{G} \in L^\infty(H^5(D_\tau); (0, T))$ және $\mathcal{G}_\tau \in L^\infty(L^2(D_\tau); (0, T)) \cap L^2(H_0^2(D_\tau); (0, T))$.

3. 2 теорема. Айталық $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \alpha', \beta')(\tau) \in L^1(0, \infty) \cap L^\infty(0, \infty)$ орындалып, $\tau > 0$ және $k > 0$ кез келген нақты сандары үшін

$$\int_0^\tau e^{ks} (|\phi_1| + |\phi_2| + |\phi_3| + |\phi_4| + |\phi_5| + |\alpha'| + |\beta'|)(s) ds \leq \Phi_0 e^{\eta\tau}$$

теңсіздігі орындалатындай $\eta \in (0, k)$ және $\Phi_0 > 0$ сандары табылса, онда

$$(\|\mathcal{G}_0\| + \int_0^\infty (|\phi_1| + |\phi_2| + |\phi_3| + |\phi_4| + |\phi_5| + |\alpha'| + |\beta'|)(\tau) d\tau) \leq \delta$$

және $\|\mathcal{G}\|(\tau) \leq V_0 e^{-\varsigma\tau}$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$, $\varsigma > 0$ және V_0 сандары табылады.

3.3 ескерту. Ұқсас нәтижелер [53] мақаласында жылжымалы шекаралы облыста Кортевег-де Фриз теңдеуі үшін алынған, алайда (3.1.1) теңдеуі үшін бірінші рет қарастырылып жатыр.

3.1.1 Есепті цилиндрлік облысқа көшіру

Алдымен цилиндрлік емес $Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$ облысы мен цилиндрлік $Q = (0, 1) \times (0, T)$ облысының арасындағы байланыс қарастырылады. Осы екі облыс арасындағы байланыс келесі диффеоморфизм арқылы анықталады $\Gamma: Q_\tau \rightarrow Q, (\xi, \tau) \mapsto \Gamma(\xi, \tau) = (x, t)$ мұндағы $x = \frac{\xi - \alpha(\tau)}{\gamma(\tau)}$ және $\gamma(\tau) = \beta(\tau) - \alpha(\tau) \neq 0$. Ал оның кері бейнелеуі $\Gamma^{-1}: Q \rightarrow Q_\tau, (x, t) \mapsto \Gamma^{-1}(x, t) = (\xi, \tau)$ болады, мұндағы $\xi = \alpha(\tau) + \gamma(\tau)x$.

Енді $\mathcal{G}(\xi, \tau) = \tilde{\mathcal{G}}(x, t)$ теңдігін қолданып (3.1.1) теңдеуін келесі түрде өрнектейміз

$$\mathcal{G}_\tau(\xi, \tau) = \tilde{\mathcal{G}}_t(x, t) - \frac{\alpha(t) + \gamma'(t)x}{\gamma(t)} \tilde{\mathcal{G}}_x(x, t), \quad \mathcal{G}_\xi(\xi, \tau) = \frac{1}{\gamma(t)} \tilde{\mathcal{G}}_x(x, t),$$

$$\mathcal{G}_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{1}{\gamma^3(t)} \tilde{\mathcal{G}}_{xxx}(x, t), \quad \mathcal{G}_{\xi\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{1}{\gamma^5(t)} \tilde{\mathcal{G}}_{xxxxx}(x, t).$$

Осы өрнектер бойынша, (3.1.1) теңдеуі

$$\tilde{\mathcal{G}}_t - \frac{\alpha(t) + \gamma'(t)x}{\gamma(t)} \tilde{\mathcal{G}}_x + \frac{1}{\gamma(t)} \tilde{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{G}}_x + \frac{1}{\gamma^3(t)} \tilde{\mathcal{G}}_{xxx} - \frac{1}{\gamma^5(t)} \tilde{\mathcal{G}}_{xxxxx} = 0 \quad (3.1.5)$$

түрінде жазылады. Ал (3.1.3) шекаралық шарттары

$$\tilde{\mathcal{G}}(0, t) = \phi_1(t) = \varphi_1(t), \quad \tilde{\mathcal{G}}(1, t) = \phi_2(t) = \varphi_2(t), \quad \tilde{\mathcal{G}}_x(0, t) = \frac{1}{\gamma(t)} \phi_3(t) = \varphi_3(t),$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_x(1, t) = \frac{1}{\gamma(t)} \phi_4(t) = \varphi_4(t), \quad \tilde{\mathcal{G}}_{xx}(1, t) = \frac{1}{\gamma^2(t)} \phi_5(t) = \varphi_5(t) \quad (3.1.6)$$

және (3.1.2) бастапқы шарты

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, 0) = \tilde{\mathcal{G}}_0((\beta(0) - \alpha(0))x + \alpha(0)) \quad (3.1.7)$$

арқылы анықталады.

3.1.2 Біртекті шекаралық есепке келтіру және регуляризациялау

Алдымен, (3.1.1)-(3.1.3) есебін цилиндрлік облыста анықталған біртекті шекаралық шарттары бар бастапқы-шектік есебіне келтіреміз. Содан кейін біз бұл есепті қолайлы шекаралық шарттары бар Курамото-Сивашинский типті теңдеу арқылы регуляризациялаймыз және арнайы базиспен Фаэдо-Галеркин әдісін қолдана отырып, осы регуляризацияланған есептің глобалды шешімі бар екенін дәлелдейміз.

(3.1.1)-(3.1.3) есептен біртекті шекаралық есепке ауысу үшін келесі алмастыруды қолданамыз

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \tilde{g}(x, t) - \varphi_1(t) - \varphi_3(t)x + (6\varphi_1(t) - 6\varphi_2(t) + 3\varphi_3(t) + 3\varphi_4(t) - \frac{\varphi_5(t)}{2})x^2 + \\ & -(8\varphi_1(t) - 8\varphi_2(t) + 3\varphi_3(t) + 5\varphi_4(t) - \varphi_5(t))x^3 \\ & + (3\varphi_1(t) - 3\varphi_2(t) + \varphi_3(t) + 2\varphi_4(t) - \frac{\varphi_5(t)}{2})x^4. \end{aligned}$$

Онда (3.1.5) теңдеуі

$$u_t + P(x, t)u + R(x, t)u_x + \frac{1}{\gamma^3(t)}u_{xxx} + \frac{1}{\gamma(t)}uu_x - \frac{1}{\gamma^5(t)}u_{xxxx} = F(x, t) \quad (3.1.8)$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\begin{aligned} P(x, t) = & \frac{1}{\gamma(t)}(\varphi_1(t) - (12\varphi_1(t) - 12\varphi_2(t) + 6\varphi_3(t) + 6\varphi_4(t) - \varphi_5(t))x \\ & + (24\varphi_1(t) - 24\varphi_2(t) + 9\varphi_3(t) + 15\varphi_4(t) - 3\varphi_5(t))x^2 \\ & - (12\varphi_1(t) - 12\varphi_2(t) + 4\varphi_3(t) + 8\varphi_4(t) - 2\varphi_5(t))x^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(x, t) = & \frac{1}{\gamma(t)}(\varphi_1(t) + \varphi_3(t)x - (6\varphi_1(t) - 6\varphi_2(t) + 3\varphi_3(t) + 3\varphi_4(t) - \frac{1}{2}\varphi_5(t))x^2 \\ & - (-8\varphi_1(t) + 8\varphi_2(t) - 3\varphi_3(t) - 5\varphi_4(t) + \varphi_5(t))x^3 \\ & + (3\varphi_1(t) - 3\varphi_2(t) + \varphi_3(t) + 2\varphi_4(t) - \frac{1}{2}\varphi_5(t))x^4 + \frac{\alpha(t) + \gamma'(t)x}{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x, t) = & P(x, t)R(x, t) - \frac{1}{\gamma^3(t)}((-4\varphi_1(t) + 48\varphi_2(t) - 18\varphi_3(t) - 30\varphi_4(t) + 6\varphi_5(t)) \\ & + (72\varphi_1(t) - 72\varphi_2(t) + 24\varphi_3(t) + 48\varphi_4(t) - 12\varphi_5(t))x) + \varphi_1'(t) + \varphi_3'(t)x \\ & - (6\varphi_1'(t) - 6\varphi_2'(t) + 3\varphi_3'(t) + 3\varphi_4'(t) - \frac{1}{2}\varphi_5'(t))x^2 + (8\varphi_1'(t) - 8\varphi_2'(t) \\ & + 3\varphi_3'(t) + 5\varphi_4'(t) - \varphi_5'(t))x^3 + (3\varphi_1'(t) - 3\varphi_2'(t) + \varphi_3'(t) + 2\varphi_4'(t) - \frac{1}{2}\varphi_5'(t))x^4. \end{aligned}$$

Енді, (3.1.8) теңдеуін $\gamma^5(t) > 0$ -ге көбейтіп, айнымалы коэффициенттері бар келесі біртекті Кавахара теңдеуіне келеміз

$$a(t)u_t + A(x,t)u + B(x,t)u_x + c(t)u_{xxx} + b(t)uu_x - u_{xxxxx} = f(x,t) \quad (3.1.9)$$

мұндағы

$$a(t) = \gamma^5(t), \quad c(t) = \gamma^2(t), \quad b(t) = \gamma^4(t),$$

$$A(x,t) = P(x,t)\gamma^5(t), \quad B(x,t) = R(x,t)\gamma^5(t), \quad f(x,t) = F(x,t)\gamma^5(t),$$

ал $P(x,t)$, $R(x,t)$, $H(x,t)$ жоғарыда анықталған.

Осылайша, біздің мақсатымыз

$$\begin{aligned} u_0(x) = & \tilde{g}_0((\beta(0) - \alpha(x))x + \alpha(0)) - \varphi_1(0) - \varphi_3(0)x + \\ & + (6\varphi_1(0) - 6\varphi_2(0) + 3\varphi_3(0) + 3\varphi_4(0) - \frac{1}{2}\varphi_5(0))x^2 + \\ & + (-8\varphi_1(0) + 8\varphi_2(0) - 3\varphi_3(0) - 5\varphi_4(0) + \varphi_5(0))x^3 + \\ & + (3\varphi_1(0) - 3\varphi_2(0) + \varphi_3(0) + 2\varphi_4(0) - \frac{1}{2}\varphi_5(0))x^4 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

бастапқы шартты және

$$u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T) \quad (3.1.11)$$

біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (3.1.9) есептің шешімін табу.

Алдымен (3.1.9)-(3.1.11) есептеріне Галеркин әдісін қолдану үшін есепті регуляризациялауға көшеміз. Ол үшін $\nu > 0$ параметрін енгіземіз.

Сонымен $Q = (0,1) \times (0,T)$ облысында $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t,\nu)$ белгісіз функциясы үшін келесі регуляризацияланған есебін қарастырамыз

$$\begin{aligned} L\tilde{u} \equiv & a(t)\tilde{u}_t + A(x,t)\tilde{u} + B(x,t)\tilde{u}_x \\ & + c(t)\tilde{u}_{xxx} + b(t)\tilde{u}\tilde{u}_x - \tilde{u}_{xxxxx} - \nu\tilde{u}_{xxxxx} = f(x,t) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(1,t) = \tilde{u}_x(0,t) = \tilde{u}_x(1,t) \\ = \nu\tilde{u}_{xxx}(0,t) = \tilde{u}_{xx}(1,t) + \nu\tilde{u}_{xxx}(1,t) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Алдымен бастапқы функцияны $u_0(x) \in H^6(0,1)$ кеңістігінен алайық. Осыдан кейін $L^2(0,1)$ кеңістігінде ортонормаланған базистік функциялар жиынын қарастырайық. Бұл базистік функциялар $\omega_j(x) \in H^6(0,1)$, $j=1, \dots, m$ шарттарын қанағаттандырады және келесі (3.1.15)–(3.1.16) меншік мәндер есебінің шешімдері

$$\nu D_6 \omega_j = \lambda \omega_j, \quad (3.1.15)$$

төмендегі шекаралық шарттармен бірге

$$\begin{aligned} \omega_j(0) = \omega_j(1) = \omega'_j(0) = \omega'_j(1) \\ = \nu \omega''_j(0) = \omega''_j(1) + \nu \omega'''_j(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Жуықтау шешімдерін келесі түрде құрамыз

$$u^N = \sum_{j=1}^N g_j^N(t) \omega_j(x), \quad (3.1.17)$$

мұндағы $g_j^N(t)$ коэффициенттері (3.1.18)–(3.1.19) қарапайым бейсызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің

$$\begin{aligned} (Lu^N, \omega_j)(t) \equiv a(t)(u_t, \omega_j)(t) + (A(x, t)u^N, \omega_j)(t) + (B(x, t)u_x^N, \omega_j)(t) + \\ + c(t)(u_{xxx}^N, \omega_j)(t) + b(t)(u^N u_x^N, \omega_j)(t) - (u_{xxxx}^N, \omega_j)(t) - \\ - \nu(u_{xxxxx}^N, \omega_j)(t) = (f, \omega_j)(t), \quad j=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$g_j^N(0) = (u_0, \omega_j), \quad (3.1.19)$$

шешімдері болып табылады. Мұндағы $(u, \vartheta) - L^2(0,1)$ -кеңістігіндегі скаляр көбейтінді, ал $\{\omega_j(x)\} - L^2(0,1)$ -кеңістігінде ортонормаланған базис функцияларының жүйесі. (3.1.18) теңдеулер жүйесін стандартты формада жазуға болады, бұл оның шешімдерінің белгілі бір уақыт аралығында $(0, T)$, анықталуын және төменде берілетін априорлық бағалаулар негізінде осы шешімнің қарастырылатын аралықта толық болатынын көрсетеді.

3.1.3 Априорлық бағалаулар

Алдымен $T > 0$ және $\nu > 0$ -ге тәуелді (3.1.17) жуықтаулары үшін қажетті априорлық бағалауларды аламыз. Бұл бағалаулар бізге u^N функцияларының глобалды анықталғанын көрсетуге мүмкіндік береді. Одан кейін $N \rightarrow \infty$ шегіне өту арқылы (3.1.12) регуляризацияланған есебінің глобалды шешімі бар екенін

дәлелдейміз. Әрі қарай (3.1.12) теңдеуіндегі $v \rightarrow 0$ шегіне өту үшін v -ге тәуелсіз бағалаулар қажет болады. Осындай бағалаулар арқылы (3.1.9)-(3.1.11) түрлендірілген есептің қажетті шешімін табамыз.

Ыңғайлылық үшін бұдан былай есептеулерде N индекcін алып тастаймыз. **Бірінші бағалау.** (3.1.18) теңдеуіндегі ω_j -дің орнына $u^N(x, t)$ -ті қойып, төмендегі өрнекті аламыз

$$a(t)(u_t, u)(t) + (A(x, t)u, u)(t) + (B(x, t)u_x, u)(t) + c(t)(u_{xxx}, u)(t) + \\ + b(t)(uu_x, u)(t) - (u_{xxxx}, u)(t) - \nu(u_{xxxxx}, u)(t) = (f, u)(t).$$

Осы өрнектерді бөліктеп интегралдау әдісін пайдалана отырып түрлендіреміз

$$a(t)(u_t, u)(t) = \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} (u, u) = \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2(t),$$

$$(B(x, t)u_x, u)(t) = \int_0^1 B(x, t)u_x u dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 B(x, t)(u^2)_x dx \right) = \frac{1}{2} B(x, t)u^2 \Big|_{x=0}^{x=1} - \\ - \frac{1}{2} \int_0^1 B_x(x, t)u^2 dx = -\frac{1}{2} (B_x(x, t), u^2)(t).$$

$$(u_{xxx}, u)(t) = \int_0^1 u_{xxx} u dx = u_{xx} u \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_{xx} u_x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2)_x dx = -\frac{1}{2} u_x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = 0,$$

$$(uu_x, u)(t) = \int_0^1 u^2 u_x dx = u^3 \Big|_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 u^2 u_x dx \Rightarrow \int_0^1 u^2 u_x dx = 0,$$

$$(u_{xxxx}, u)(t) = \int_0^1 u_{xxxx} u dx = u_{xxx} u \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_{xxx} u_x dx = -u_{xx} u_x \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u_{xx} u_{xx} dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_{xx}^2)_x dx = \frac{1}{2} u_{xx}^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} (u_{xx}^2(1, t) - u_{xx}^2(0, t)),$$

$$(u_{xxxxx}, u)(t) = u_{xxxx} u \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_{xxxx} u_x dx = -u_{xxx} u_x \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u_{xxx} u_{xx} dx = u_{xx} u_{xx} \Big|_{x=0}^{x=1} - \\ - \int_0^1 (u_{xx})^2 dx = u_{xx}(1, t)u_{xx}(1, t) - u_{xx}(0, t)u_{xx}(0, t) - \|u_{xx}\|^2.$$

Алынған өрнектерді және (3.1.14) шекаралық шарттарды ескерсіп

$$\begin{aligned} & \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2(t) + \nu \|u_{xxx}\|^2 + \frac{1}{2} (u_{xx}^2(0,t) + u_{xx}^2(1,t)) \\ & + (A(x,t), u^2)(t) - \frac{1}{2} (B_x(x,t), u^2)(t) = (f, u)(t) \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктегі мүшелерді келесідей бағалауға болады

$$|(A(x,t), u^2)(t)| \leq \sup_{x \in (0,1)} |A(x,t)| \|u\|^2(t),$$

$$|(B_x(x,t), u^2)(t)| \leq \sup_{x \in (0,1)} |B_x(x,t)| \|u\|^2(t),$$

$$|(f, u)(t)| \leq \frac{1}{2} \|u\|^2(t) + \frac{1}{2} \|f\|^2(t).$$

Жоғарыдағы теңсіздіктерді қолдана отырып, келесі бағалауға келеміз

$$\begin{aligned} & \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2(t) + \nu \|u_{xxx}\|^2 + \frac{1}{2} (u_{xx}^2(0,t) + u_{xx}^2(1,t)) \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \sup_{x \in (0,1)} |A(x,t)| + \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |B_x(x,t)|\right) \|u\|^2(t) + \frac{1}{2} \|f\|^2(t). \end{aligned}$$

Бұл теңсіздікті $t \in (0, T)$ аралығында интегралдап, Гронуолл леммасын қолданып, келесі нәтижені аламыз

$$\begin{aligned} & \|u\|^2(t) + \nu \int_0^t \|u_{xxx}\|^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (u_{xx}^2(0, \tau) + u_{xx}^2(1, \tau)) d\tau \\ & \leq C(\|u_0\|^2 + \int_0^t \|f\|^2(\tau) d\tau), \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

мұндағы оң мәнді C тұрақтысы $T > 0$, $\sup_{\bar{Q}} |A(x,t)|$, $\sup_{\bar{Q}} |B_x(x,t)|$, $\inf_{(0,T)} |a(t)|$, мәндеріне тәуелді, бірақ $\nu > 0$ параметріне тәуелсіз. Мұнда $\|\cdot\|$ өрнегі $L^2(0,1)$ кеңістігіндегі норманы анықтайды.

ν параметріне тәуелді бағалаулар. Регуляризациямен байланысты есептерді зерттеу барысында маңызды кезеңдердің бірі — регуляризация параметрі ν -ға тәуелді бағалауларды алу. Мұндай бағалаулар регуляризацияланған есептің шешімдеріне параметрдің әсерін анықтап береді. ν параметрі әдетте бастапқы есептің тұрақтылығы мен тегістігі жеткіліксіз болғанда, шешімнің қасиеттерін жақсарту үшін енгізіледі. Сонымен қатар, регуляризацияның дұрыс таңдалғанын тексеру үшін $\nu \rightarrow 0$ шегінде шешімдердің өзгеруін бақылау маңызды.

Алдымен (3.1.18) теңдеуінде ω_j -дің орнына $u_{xxxxx}^N(x, t)$ -ті қойып, келесі

$$\begin{aligned} & a(t)(u_t, u_{xxxxx})(t) + (A(x, t)u, u_{xxxxx})(t) + (B(x, t)u_x, u_{xxxxx})(t) + \\ & + c(t)(u_{xxx}, u_{xxxxx})(t) + b(t)(uu_x, u_{xxxxx})(t) - (u_{xxxxx}, u_{xxxxx})(t) - \\ & - \nu(u_{xxxxx}, u_{xxxxx})(t) = (f, u_{xxxxx})(t) \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. Енді (3.1.14) шекаралық шарттарын ескере отырып, бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз

$$\begin{aligned} (u_t, u_{xxxxx})(t) &= \int_0^1 u_t u_{xxxxx} dx = u_t u_{xxxxx} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_{tx} u_{xxxxx} dx = -u_{tx} u_{xxxxx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \\ &+ \int_0^1 u_{txx} u_{xxxxx} dx = u_{txx} u_{xxxxx} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_{txxx} u_{xxxxx} dx = u_{txx}(1, t) u_{xxxxx}(1, t) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt} (u_{xxx})^2 dx = -\nu u_{txxx}(1, t) u_{xxxxx}(1, t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|^2(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|^2(t) - \nu \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_{xxx}^2(1, t). \end{aligned}$$

Осылайша, келесі теңдікке қол жеткіземіз

$$\begin{aligned} & \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|^2(t) + \nu \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} u_{xxx}^2(1, t) - (A(x, t)u, u_{xxxxx})(t) - \\ & - (B(x, t)u_x, u_{xxxxx})(t) - c(t)(u_{xxx}, u_{xxxxx})(t) - b(t)(uu_x, u_{xxxxx})(t) + \\ & + (u_{xxxxx}, u_{xxxxx})(t) + \nu(u_{xxxxx}, u_{xxxxx})(t) = -(f, u_{xxxxx})(t). \end{aligned}$$

Осы теңдіктің мүшелеріне Эрлинг және Янг теңсіздіктерін [54, 55] кез келген $\varepsilon_i > 0$ мәнімен пайдалана отырып, сондай-ақ С. Л. Соболевтің ендіру теоремасын [57] қолдану арқылы

$$\begin{aligned} |(A(x, t)u, u_{xxxxx})|(t) &\leq \varepsilon_1 \|u_{xxxxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_1} \sup_Q |A|^2 \|u\|^2(t), \\ |(B(x, t)u_x, u_{xxxxx})|(t) &\leq \varepsilon_2 \|u_{xxxxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_2} \sup_Q |B|^2 \|u_x\|^2(t), \\ |b(t)(uu_x, u_{xxxxx})|(t) &\leq b(t) \|u_{xxxxx}\|(t) \sup_{x \in (0,1)} |u_x|(t) \|u\|(t) \leq \\ &\leq \varepsilon_3 \|u_{xxxxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_3} \|u\|^2(t) \|u_{xxx}\|^2(t), \end{aligned}$$

$$|c(t)(u_{xxx}, u_{xxxxx})|(t) \leq \varepsilon_4 \|u_{xxxxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_4} \|u_{xxx}\|^2(t),$$

$$|(u_{xxxxx}, u_{xxxxx})|(t) \leq \varepsilon_5 \|u_{xxxxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_5} (\varepsilon_6 \|u_{xxxxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_6} \|u\|^2(t))$$

теңсіздіктеріне ие боламыз. Осы бағалауларды соңғы теңдікке қолдану нәтижесінде

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|^2(t) + \nu \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} u_{xxx}^2(1, t) + \nu \|u_{xxxxx}\|^2(t) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^7 \varepsilon_i \|u_{xxxxx}\|^2(t) + (C_{\varepsilon_1} \sup_Q |A|^2 + \frac{C_{\varepsilon_6}}{4\varepsilon_5}) \|u\|^2(t) + \\ + (C_{\varepsilon_2} \sup_Q |B|^2 + C_{\varepsilon_3} \|u\|^2(t) + C_{\varepsilon_4}) \|u_{xxx}\|^2(t) + C_{\varepsilon_7} \|f\|^2(t) \end{aligned}$$

теңсіздігін аламыз. Сәйкес ε_i -ларды қолайлы таңдап және (3.1.20) -теңсіздігін ескерсек, Гронуолл леммасы бойынша

$$\|u_{xxx}\|^2(t) + \nu u_{xxx}^2(1, t) + \nu \int_0^t \|u_{xxxxx}\|^2(\tau) d\tau \leq K_1 (\|u_0\|_{H^3(0,1)}^2 + \int_0^t \|f\|^2(\tau) d\tau) \quad (3.1.21)$$

орынды, мұндағы оң мәнді K_1 тұрақтысы (3.1.20)-теңсіздігіндегі C тұрақтысына тәуелді және $\nu > 0$ параметріне тәуелді.

Енді (3.1.18)-ші теңдеуді $t > 0$ -ге қатысты дифференциалдап, ω_j -нің орнына $u_t(x, t)$ -мен алмастыру арқылы

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2(t) + a'(t) \|u_t\|^2(t) + (A_t, uu_t)(t) + (A, u_t^2)(t) + (B_t, u_t u_x)(t) + \\ + (B, u_t u_{xt})(t) + b'(t) (uu_x, u_t)(t) + b(t) (u_t^2, u_x)(t) + b(t) (uu_t, u_{xt})(t) + \\ + c(t) (u_{xxx}, u_t)(t) + c'(t) (u_{xxx}, u_t)(t) - (u_{xxxxx}, u_t)(t) - \nu (u_{xxxxx}, u_t)(t) = \\ = (f_t, u_t)(t) \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

теңдігіне келеміз.

(3.1.14)-шекаралық шарттарын пайдаланып және бөліктеп интегралдау әдісін қолданып, (3.1.22)-теңдеуін келесі түрге келтіреміз

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2(t) + \frac{1}{2} (u_{bxx}^2(0, t) + u_{bxx}^2(1, t)) + \nu \|u_{xxx}\|^2(t) = \\ = a'(t) \|u_t\|^2(t) + (A_t, uu_t)(t) + (A, u_t^2)(t) + (B_t, u_t u_x)(t) + \\ + (B, u_t u_{xt})(t) + b'(t) (uu_x, u_t)(t) + b(t) (u_t^2, u_x)(t) + b(t) (uu_t, u_{xt})(t) + \\ + c(t) (u_{xxx}, u_t)(t) + c'(t) (u_{xxx}, u_t)(t) + (f_t, u_t)(t). \end{aligned}$$

Бұл теңдіктегі мүшелерді бағаласақ,

$$|(A_t, uu_t)(t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |A_t| (\|u\|^2 + \|u_t\|^2), \quad |(A, u_t^2)(t)| \leq \sup_{x \in (0,1)} |A| \|u_t\|^2,$$

$$|(B_t, u_t u_x)(t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |B_t| (\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2), \quad |(B, u_t u_{xt})(t)| = \frac{1}{2} |(B_x, u_t^2)(t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |B_x| \|u_t\|^2,$$

$$|b'(t)(uu_x, u_t)(t)| \leq \frac{1}{2} |b'(t)| \sup_{x \in (0,1)} |u| (\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2), \quad |b(t)(u_t^2, u_x)(t)| \leq |b(t)| \sup_{x \in (0,1)} |u_x| \|u_t\|^2,$$

$$|b(t)(uu_t, u_{xt})(t)| = \frac{1}{2} |b(t)(u_x u_t^2)(t)| \leq \frac{1}{2} |b(t)| \sup_{x \in (0,1)} |u_x| \|u_t\|^2,$$

$$c(t)(u_{xxx}, u_t)(t) = -c(t)(u_{xxt}, u_{tx}) = -\frac{1}{2} c(t) u_{tx}^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = 0,$$

$$|c'(t)(u_{xxx}, u_t)(t)| \leq \frac{1}{2} |c(t)| (\|u_{xxx}\|^2 + \|u_t\|^2), \quad |(f_t, u_t)(t)| \leq \frac{1}{2} (\|f_t\|^2 + \|u_t\|^2)$$

теңсіздіктерге ие боламыз. Жоғарыда алынған бағалауларды пайдалана отырып, (3.1.22)-теңдігінен келесі бағалауды аламыз

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2(t) + \frac{1}{2} (u_{txx}^2(0, t) + u_{txx}^2(1, t)) + \nu \|u_{xxx}\|^2(t) \leq \\ \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |A_t| + \sup_{x \in (0,1)} |A| + \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |B_t| + \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |B_x| + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} |b'(t)| \sup_{x \in (0,1)} |u| + \frac{3}{2} |b(t)| \sup_{x \in (0,1)} |u_x| + \frac{1}{2} |c(t)| \right) \|u_t\|^2(t) + \\ + \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} |A_t| \|u\|^2 + \frac{1}{2} |c(t)| \|u_{xxx}\|^2 + \frac{1}{2} \|f_t\|^2. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Сонымен қатар (3.1.18) теңдеудегі ω_j -ны $u_t(x, t)$ -мен ауыстырып, $t = 0$ жағдайында

$$\|u_t(x, 0)\| \leq K_2 \left(\|u_0\|_{H^6(0,1) \cap H_0^2(0,1)} + \|f\|(0) \right)$$

орынды. Енді (3.1.20) және (3.1.21) бағалауларын ескерсек, жуықтау шешімнің $u^N(x, t) \in L^\infty(H^3(0,1); (0, T))$ кеңістігіне тиісті екенін көреміз. (3.1.23) теңсіздігіне Гронуолл леммасынан

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2(t) + \nu \int_0^t \|u_{xxxx}\|^2(\tau) d\tau + \int_0^t (u_{xxx}^2(0, \tau) + u_{xxx}^2(1, \tau)) d\tau \leq \\ \leq K_3 (\|u_0\|_{H^6(0,1) \cap H_0^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|f_t\|^2(\tau) d\tau + \|f\|^2(0)), \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

мұндағы K_3 тұрақтысы $T > 0$, (3.2.20)-дағы C , $\|u_0\|_{H^6(0,1) \cap H_0^2(0,1)}$, $\|f\|$, K_1 , K_2 және $\nu > 0$ параметріне тәуелді.

3.4 лемма. (3.1.18) теңдеуін t -ға қатысты дифференциалдасақ келесі тұжырымды аламыз

$$u_t^N(x, t) \in L^2(H^{-2}(0,1); (0, T)).$$

Сонымен 3.4 лемманың және (3.1.20), (3.1.21), (3.1.24) бағалауларының көмегімен жуықтау шешімдерінің кез келген ақырлы $T > 0$ уақыт аралығы үшін $Q = (0,1) \times (0, T)$ облысына кеңейтілетінін көрсетеміз. Бұған қоса, аталған бағалаулар бойынша $u^N(x, t)$ -ның жинақталатын ішкі тізбегінің бар екені шығады. Осы нәтижелерге сүйене отырып, (3.1.12)–(3.1.14) регуляризацияланған есебі үшін $N \rightarrow \infty$ шегінде глобалды шешімнің бар екені дәлелденеді.

ν параметріне тәуелсіз бағалаулар. Бұл бөлімде (3.1.12)–(3.1.14) регуляризацияланған есебінің шешімдері үшін $\nu > 0$ -ге тәуелсіз бағалаулар аламыз. Мұндай бағалауларды алуымыздың негізгі себебі – есеп шешімдерінің $\nu \rightarrow 0$ шегіндегі сипатын зерттеу. Бұл мақсат үшін параметрдің белгілі бір аралықта шектелгенін қарастырсақ жеткілікті, атап айтқанда, $\nu \in (0, 1/2)$.

Енді (3.1.12) теңдеуіннің екі жағын да $e^x u(x, t)$ -ге көтейтіп, келесідей теңдеуді аламыз

$$\begin{aligned} a(t)(e^x u, u_t)(t) + (A(x, t)e^x u, u)(t) + (B(x, t)e^x u, u_x)(t) + \\ + c(t)(e^x u, u_{xxx})(t) + b(t)(e^x u^2, u_x)(t) - (e^x u, u_{xxxx})(t) - \\ - \nu(e^x u, u_{xxxx})(t) = (e^x u, f)(t). \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Бұл теңдіктің мүшелерін бөліктеп интегралдау және Юнг теңсіздігін қолдану арқылы, келесі түрге келтіреміз

$$a(t)(e^x u, u_t)(t) = \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} (e^x, u^2)(t), \quad |(A(x, t)e^x u, u)(t)| \leq \sup_{x \in (0,1)} |A| (e^x, u^2)(t),$$

$$|(B(x, t)e^x u, u_x)(t)| \leq \varepsilon (e^x, u_x^2)(t) + C_\varepsilon \sup_{x \in (0,1)} |B|^2 (e^x, u^2)(t),$$

$$\begin{aligned}
|b(t)(e^x u^2, u_x)(t)| &= \left| -\frac{b(t)}{3}(e^x, u^3)(t) \right| \leq \frac{|b(t)|}{3} \max_{x \in [0,1]} |u(x,t)| |(e^x, u^2)(t)| \leq \\
&\leq \frac{|b(t)|}{3} e \|u_x\|(t) \|u\|^2(t) \leq \varepsilon_1 (e^x, u_x^2)(t) + C_{\varepsilon_1} \|u\|^4(t) \leq \\
&\leq \varepsilon_1 (e^x, u_x^2)(t) + C_{\varepsilon_1} (\|u_0\|^4 + \|f\|^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|c(t)(e^x u, u_{xxx})(t)| &= |c(t)(-(e^x u, u_{xx})(t) - (e^x u_x, u_{xx})(t))| = \\
&= \left| c(t)(-(e^x u, u_{xx})(t) - \frac{1}{2}(e^x, (u_x^2)_x)(t)) \right| = \\
&= \left| c(t)((e^x u, u_x)(t) + (e^x, u_x^2)(t) + \frac{1}{2}(e^x, u_x^2)(t)) \right| = \\
&= \left| c(t)(-\frac{1}{2}(e^x, u^2)(t) + \frac{3}{2}(e^x, u_x^2)(t)) \right| \leq \\
&\leq \frac{|c(t)|}{2} ((e^x, u^2)(t) + 3(e^x, u_x^2)(t)),
\end{aligned}$$

мұндағы қолданылған тұрақтылар $\varepsilon, \varepsilon_1$ – оң сандар болып табылады. Сонымен қатар,

$$\begin{aligned}
-(e^x u, u_{xxxxx})(t) - \nu(e^x u, u_{xxxxx})(t) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \nu \right) u_{xx}^2(0, t) + e \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \nu \right) u_{xx}^2(1, t) \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) (e^x, u^2)(t) + \left(3\nu - \frac{5}{2} \right) (e^x, u_x^2)(t) + \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2} \nu \right) (e^x, u_{xx}^2)(t) + \nu(e^x, u_{xxx}^2)(t).
\end{aligned}$$

Жоғарыда алынған соңғы бағалауларды (3.1.25)-теңдігіне қойып, келесі теңсіздікке келеміз

$$\begin{aligned}
\frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} (e^x, u^2)(t) &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \nu \right) u_{xx}^2(0, t) + e \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \nu \right) u_{xx}^2(1, t) + \\
&+ \left(3\nu - \frac{5}{2} - \varepsilon - \varepsilon_1 \right) (e^x, u_x^2)(t) + \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2} \nu \right) (e^x, u_{xx}^2)(t) + \nu(e^x, u_{xxx}^2)(t) \leq \\
&\leq \left(\sup_{x \in (0,1)} |A| + C_{\varepsilon} \sup_{x \in (0,1)} |B|^2 + \frac{\nu}{2} \right) (e^x, u^2)(t) + e \|f\|^2(t) + C_{\varepsilon_1} (\|u_0\|^4 + \|f\|^4).
\end{aligned}$$

Бұл теңсіздіктен келесі ықшамдалған түрге өтуге болады

$$a(t) \frac{d}{dt} (e^x, u^2)(t) \leq C_1 (e^x, u^2)(t) + 2e \|f\|^2(t) + C_2 (\|u_0\|^4 + \|f\|^4).$$

Енді Гронуолл леммасын қолданып, келесі бағалауды аламыз

$$\|u\|^2(t) \leq (e^x, u^2)(t) \leq C_3 (\|u_0\|^2 + \|f\|^2). \quad (3.1.26)$$

Осы нәтижені интегралдау арқылы келесі маңызды теңсіздікке келеміз

$$\begin{aligned} \int_0^t e^x (u_{xx}^2(0, \tau) + u_{xx}^2(1, \tau) + \|u_x\|^2(\tau) + \|u_{xx}\|^2(\tau) + \nu \|u_{xxx}\|^2(\tau)) d\tau \leq \\ \leq C_4 (\|u_0\|^2 + \|f\|^2), \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

мұндағы C_4 – тұрақтысы u, f – функцияларының $L^2(0,1)$ кеңістігіндегі нормаларына тәуелді, бірақ $\nu > 0$ параметріне тәуелді емес.

Келесі кадамда (3.1.12)-ші теңдеуді t -ға қатысты дифференциалдап, алынған нәтижені $e^x u_t$ –ге көбейтеміз және оны $(0,1)$ аралықта интегралдап, мынадай теңдікке келеміз

$$\begin{aligned} a(t)(e^x u_t, u_t)(t) + a(t)(e^x u_t, u_t)(t) + (A_t e^x u_t, u_t)(t) + (A e^x u_t, u_t)(t) + \\ + (B_t e^x u_x, u_t)(t) + (B e^x u_{xt}, u_t)(t) + c(t)(e^x u_t, u_{xxx})(t) + c'(t)(e^x u_t, u_{xxx})(t) + \\ + ((b(t) u u_x)_t, e^x u_t)(t) - (e^x u_t, u_{xxxxx})(t) - \nu (e^x u_t, u_{xxxxx})(t) = (e^x u_t, f_t)(t). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

(3.1.28)-ші теңдіктің барлық мүшелерін бағалау үшін бөліктеп интегралдау әдісін және Юнг теңсіздігін пайдаланамыз. Нәтижесінде төмендегі бағалауларды аламыз

$$a(t)(e^x u_t, u_t)(t) = \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} (e^x, u_t^2)(t), \quad a'(t)(e^x u_t, u_t)(t) = a'(t)(e^x, u_t^2)(t),$$

$$|(A(x, t) e^x, u_t^2)(t)| \leq \sup_{x \in (0,1)} |A| (e^x, u_t^2)(t),$$

$$|(A_t e^x, u u_t)(t)| \leq \varepsilon_1 (e^x, u^2)(t) + C_{\varepsilon_1} \sup_{x \in (0,1)} |A_t|^2 (e^x, u_t^2)(t),$$

$$|(B_t e^x u_x, u_t)(t)| \leq \varepsilon_2 (e^x, u_x^2)(t) + C_{\varepsilon_2} \sup_{x \in (0,1)} |B|^2 (e^x, u_t^2)(t),$$

$$\begin{aligned} |(B e^x u_{xt}, u_t)(t)| &= \frac{1}{2} |(B e^x, (u_t^2)_x)(t)| = \frac{1}{2} |(B_x e^x, u_t^2)(t)| + \frac{1}{2} |(B e^x, u_t^2)(t)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in (0,1)} (|B| + |B_x|) |(e^x, u_t^2)(t)|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|c(t)(e^x u_t, u_{xxx})(t)| &= |c(t)(-(e^x u_t, u_{xxx})(t) - (e^x u_{xt}, u_{xxx})(t))| = \\
&= \left| c(t)(-(e^x u_t, u_{xxx})(t) - \frac{1}{2}(e^x, (u_{xt}^2)_x)(t)) \right| = \\
&= \left| c(t)((e^x u_t, u_{xt})(t) + (e^x, u_{xt}^2)(t) + \frac{1}{2}(e^x, u_{xt}^2)(t)) \right| = \\
&= \left| c(t)(-\frac{1}{2}(e^x, u_t^2)(t) + \frac{3}{2}(e^x, u_{xt}^2)(t)) \right| \leq \\
&\leq \frac{|c(t)|}{2} ((e^x, u_t^2)(t) + 3(e^x, u_{xt}^2)(t)),
\end{aligned}$$

$$|c'(t)(e^x u_t, u_{xxx})(t)| \leq \varepsilon_3 (e^x, u_{xxx}^2)(t) + C_{\varepsilon_3} c'(t)(e^x, u_t^2)(t),$$

мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – кез-келген оң сандар, ал $C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, C_{\varepsilon_3}$ – сәйкес тұрақтылар. Сәйкесінше,

$$\begin{aligned}
-(e^x u_t, u_{xxxxx})(t) - \nu(e^x u_t, u_{xxxxx})(t) &= (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\nu)u_{xxx}^2(0, t) + e(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\nu)u_{xxx}^2(1, t) + \\
&+ (\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2})(e^x, u_t^2)(t) + (3\nu - \frac{5}{2})(e^x, u_{xt}^2)(t) + (\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\nu)(e^x, u_{xxx}^2)(t) + \nu(e^x, u_{xxxx}^2)(t).
\end{aligned}$$

Енді (3.1.28)-дің соңғы мүшесін қарастырайық

$$\begin{aligned}
((b u u_x)_t, e^x u_t)(t) &= -((b' u^2/2 + b u u_t), (e^x u_t + e^x u_{xt}))(t) = \\
&= -(b' u^2/2, e^x u_t)(t) - (b' u^2/2, e^x u_{xt})(t) - \\
&- (b u u_t, e^x u_t)(t) - (b u u_t, e^x u_{xt})(t).
\end{aligned}$$

Бұл теңдіктің оң жақ бөлігіндегі алғашқы екі мүшені бұрынғы тәсілмен бағалай аламыз. Ал соңғы екі мүше үшін келесі бағалауларды қолданамыз

$$I_1 = |(b u u_t, e^x u_t)(t)| \leq C_5 \|u_x\|(t)(e^x u_t^2)(t) \leq C_6 (1 + \|u_x\|^2(t))(e^x u_t^2)(t),$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= |(b u u_t, e^x u_{xt})(t)| \leq \varepsilon_4 (e^x, u_{xt}^2)(t) + C_{\varepsilon_4} (e^x u_t^2, u_t^2)(t) \leq \\
&\leq \varepsilon_4 (e^x, u_{xt}^2)(t) + C_{\varepsilon_4} \|u_x\|^2(e^x, u_t^2)(t),
\end{aligned}$$

мұндағы $\varepsilon_4 > 0$ кез-келген кіші сан, ал $C_{\varepsilon_4}, C_5, C_6$ – тұрақтылар болып табылады. Сонымен қатар, бастапқы уақыт мезетінде алынатын бағалаулардан

$$\|u_t(x, 0)\| \leq C_7 (\|u_0\|_{H^5(0,1) \cap H_0^2(0,1)} + \nu \|u_0\|_{H^6(0,1)} + \|f\|(0))$$

келіп шығады. Жоғарыдағы бағалауларды біріктіре отырып, келесі нәтижені тұжырымдаймыз

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2(t) + \int_0^t (u_{xx}^2(0, \tau) + u_{xx}^2(1, \tau) + \|u_{xt}\|^2(\tau) + \|u_{xxt}\|^2(\tau) + \nu \|u_{xxx}\|^2(\tau)) d\tau \\ & \leq C_8 (\|u_0\|_{H^5(0,1) \cap H_0^2(0,1)}^2 + \nu \|u_0\|_{H^6(0,1)}^2 + \int_0^t \|f_t\|^2(\tau) d\tau). \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

3.1.4 Есептің шешімінің бар болуы және жалғыздығы

$\nu \rightarrow 0$ шегіне өту. Жоғарыда алынған (3.1.26), (3.1.27) және (3.1.29) бағалауларының көмегімен (3.1.18) регуляризацияланған есебінің $\nu \rightarrow 0$ шегіндегі шешімін әлсіз мағынада алуға мүмкіндік туады [57]. Атап айтқанда, шешімдер жиынынан $u = u(x, t, \nu)$ -дің ν -ға қатысты жинақталатын ішкі тізбегін таңдап алуға болады. Сонда келесі лемманы тұжырымдауға болады.

3.5 лемма.

- $u^\nu \rightarrow u$ әлді мағынада $C(\bar{Q})$ -де және әлсіз-* мағынада $L^\infty(0, T; H_0^2(0, 1))$ -де,
- $u_t^\nu \rightarrow u_t$ және $u_x^\nu \rightarrow u_x$ әлсіз-* мағынада $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ -де және әлсіз мағынада $L^2(0, T; H_0^2(0, 1))$ -де,
- $\nu u_{xxx}^\nu \rightarrow 0$ және әлсіз-* мағынада $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ де.

Алынған (3.1.21) және (3.1.24) бағалауларын ескерсек, шектік функция $\mathcal{G} \in L^2(0, T; H^3(0, 1) \cap H_0^2(0, 1))$ болады, ал $\mathcal{G}_{xx}(0, t) = 0$ шартымен келесі интегралдық теңдік орындалады

$$\begin{aligned} (Lu^\nu, \mathcal{G}) & \equiv ([a(t)u_t^\nu + A(x, t)u^\nu + B(x, t)u_x^\nu + b(t)u^\nu u_x^\nu + c(t)u_{xxx}^\nu], \mathcal{G})(t) + \\ & + (u_{xx}^\nu, \mathcal{G}_{xxx})(t) + \nu (u_{xxx}^\nu, \mathcal{G}_{xxx})(t) = (f, \mathcal{G})(t). \end{aligned}$$

Енді осы теңдікте $\nu \rightarrow 0$ шегіне өтіп, 3.6 лемманың нәтижесі бойынша

$$\begin{aligned} & ([a(t)u_t + A(x, t)u + B(x, t)u_x + b(t)uu_x + c(t)u_{xxx}], \mathcal{G})(t) + \\ & + (u_{xx}, \mathcal{G}_{xxx})(t) = (f, \mathcal{G})(t) \end{aligned}$$

теңдігіне ие боламыз. Сонымен, шектік шешім $u(x, t)$ үшін келесі шекаралық шарттар анық орындалады

$$u(0, t) = u(1, t) = u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0,$$

ал қалған шарт $u_{xx}(1, t) = 0$ тек әлсіз мағынада орындалады. Шектік функцияның қажетті регулярлығы мен тегістігі [57]-жұмыстағы стандартты аргументтермен оңай дәлелденеді.

Осылайша, біз бастапқы берілген есепке $u_0(x) \in H^6(0,1)$ қосымша шарты арқылы (3.1.9)-(3.1.11) есебінің регулярлы шешімін алдық. Алайда бұл шартты жеңілдетуге болады, себебі бағалауларды мұқият тексерсек, шешімнің бар болуы үшін (3.1.25) және (3.1.26) теңсіздіктерінде бастапқы дерек $u_0(x) \in L^2(0,1)$ болса да жеткілікті екенін байқаймыз.

Сонымен қатар, (3.1.29)-бағалауының көмегімен $\nu \rightarrow 0$ шегіне өту арқылы келесі бағалауға келеміз

$$\|u_t\|^2(t) + \int_0^t (\|u_{xt}\|^2(\tau) + \|u_{xxt}\|^2(\tau)) d\tau \leq C_8 \left(\|u_0\|_{H^5(0,1) \cap H_0^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|f_t\|^2(\tau) d\tau \right).$$

Бұл бағалау шешімнің ν -ға тәуелсіз түрде бар екенін және оның қажетті тұрақтылық пен тегістік қасиеттеріне ие екендігін көрсетеді. Осылайша берілген бастапқы шартты $u_0(x) \in H^5(0,1) \cap H_0^2(0,1)$ және $u_0'''(0) = u_0''(1) = 0$ функциясын $u_0^s(x) \in H^6(0,1) \cap H_0^2(0,1)$ және $u_0'''(0) = u_0''(1) = 0$ тізбегімен жуықтасақ, біз (3.1.10) бастапқы шартына сәйкес келетін шешімді аламыз. Бұл келесі 3.1 теореманың шешімінің бар екенін дәлелдейді.

(3.1.1)-(3.1.3) есебінің шешімінің жалғыздығы. Айталық u_1 және u_2 функциялары (3.1.9), (3.1.10) және (3.1.11) есептің екі шешімі, олардың айырымы ретінде $\vartheta = u_1 - u_2$ енгіземіз. Онда ϑ келесі теңдеуді

$$a(t)\vartheta_t + A(x,t)\vartheta + B(x,t)\vartheta_x + b(t)(u_1\vartheta_x + u_2\vartheta_x) + \vartheta_{xxx} - \vartheta_{xxxx} = 0, \quad (3.1.30)$$

шекаралық шарттарымен

$$\vartheta(0,t) = \vartheta(1,t) = 0, \quad \vartheta_x(0,t) = \vartheta_x(1,t) = \vartheta_{xx}(1,t) = 0, \quad (3.1.31)$$

және бастапқы шартымен

$$\vartheta(x,0) = 0 \quad (3.1.32)$$

қанағаттандырады. (3.1.30)-шы теңдеуді $e^x \vartheta$ -ға көбейтіп $(0,1)$ аралығында x бойынша интегралдасақ, келесі интегралдық теңдікті аламыз

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} (e^x, \vartheta^2)(t) + (A(x,t)e^x, \vartheta^2)(t) - \frac{1}{2} ((B_x + B)e^x, \vartheta^2)(t) + \\ + b(t)((u_1\vartheta_x + u_2\vartheta_x)e^x, \vartheta)(t) - c(t)(e^x, \vartheta_{xxx})(t) - (e^x, \vartheta_{xxxx})(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Мұнда u_1 және u_2 функциялары есептің регулярлы шешімдері болғандықтан,

$$\sup_{\bar{Q}}(|u_1(x,t)|, |u_2(x,t)|) \leq U < \infty,$$

мұндағы U – белгілі бір тұрақты сан. Бұл теңсіздіктен бірден $b(t)(u_1 g_x + u_2 g_x) e^x$ өрнегіндегі мүшелердің барлығы шенелген және ақырлы екенін байқаймыз. (3.1.33)-теңдеуін бағалаулар көмегімен жеңілдетіп, мынадай теңсіздікке келеміз

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{2} \frac{d}{dt} (e^x, g^2)(t) + \frac{1}{2} g_{xx}^2(0,t) + \frac{5}{2} (e^x, g_{xx}^2)(t) \leq \\ \leq \sup_{\bar{Q}} (1 + |A| + \frac{1}{2} (|B| + |B_x| + |c|)) (e^x, g^2)(t) + \frac{3}{2} (1 + |c|) (e^x, g_x^2)(t) + \\ + b(t) (3U e^x, |g| |g_x|)(t) + b(t) (U e^x, g^2)(t). \end{aligned}$$

Мұнда коэффициенттер $a(t), A(x,t), B(x,t), b(t)$ және $c(t)$ -ның шенелгендігінен

$$(e^x, g^2)(t) \leq C \int_0^t (e^x, g^2)(\tau) d\tau$$

орынды. Гронуолл леммасына сәйкес соңғы теңсіздіктен $(e^x, g^2)(t) = 0$, яғни $\|g\| = 0$ екені шығады. Осылайша $g(x,t) = 0$ барлық уақытта орындалады, бұл өз кезегінде шешімнің жалғыздығын дәлелдейді. Демек, біз 3.1 теоремасын толығымен дәлелдедік.

3.1.5 Есептің шешімінің тұрақтылығы

Есептің шешімінің L^2 – нормасы бойынша экспоненциалды түрде азаятынын дәлелдеу үшін осы нормаға уақытқа тәуелсіз априорлық бағалау аламыз. Ол үшін (3.1.8) теңдеуін u –ға көбейтіп x бойынша интегралдасақ, төмендегі теңдікке келеміз

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^5(t)} u_{xx}^2(0,t) + \left(\left(P - \frac{1}{2} R_x \right), u^2 \right)(t) = -(H, u)(t). \quad (3.1.34)$$

Соңғы теңдікке стандартты теңсіздікті қолдану нәтижесінде

$$\|u\|(t) \frac{d}{dt} \|u\|(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^5(t)} u_{xx}^2(0,t) \leq \sup_{x \in (0,1)} \left| P - \frac{1}{2} R_x \right|(t) \|u\|^2(t) + \|H\|(t) \|u\|(t),$$

бағалауына ие боламыз. Бұл жерде $\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^5(t)} u_{xx}^2(0, t) > 0$ және $\|u\|(t) \neq 0$ екенін ескерсек,

$$\frac{d}{dt} \|u\|(t) \leq \sup_{x \in (0,1)} \left| P - \frac{1}{2} R_x \right| (t) \|u\|(t) + \|H\|(t).$$

Соңғы бағалауды $t > 0$ бойынша интегралдап және Гронуолл теңсіздігін қолдану арқылы келесі бағалауды аламыз

$$\|u\|(t) \leq \left(\|u_0\| + \int_0^t \|H(\tau)\| d\tau \right) \exp \left(\int_0^t \sup_{x \in (0,1)} \left| P - \frac{1}{2} R_x \right| (\tau) d\tau \right), \quad (3.1.35)$$

мұндағы интегралдар $H(x, t), P(x, t), R(x, t)$ – функцияларына тәуелді. Өз кезегінде бұл функциялар бастапқы шарттар мен шекаралық функциялар $\alpha(t), \beta(t), \varphi_i(t), i = 1, \dots, 5$ -ке тәуелді, сондықтан барлық $t > 0$ үшін шектелген.

Енді (3.1.8) теңдеуін $G(x)u$ –ға көбейтіп x бойынша интегралдасақ, мына теңдеуге келеміз

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (G, u^2)(t) + \left(\left(P - \frac{1}{2} R_x \right) G - \frac{1}{2} R G', u^2 \right) (t) - \frac{1}{3\gamma(t)} (G', u^3)(t) - \\ & - \frac{1}{2\gamma^3(t)} (G''', u^2)(t) + \frac{3}{2\gamma^3(t)} (G', u_x^2)(t) + \frac{1}{2\gamma^5(t)} (G''''', u^2)(t) - \\ & - \frac{5}{2\gamma^5(t)} (G''', u_x^2)(t) + \frac{5}{2\gamma^5(t)} (G', u_{xx}^2)(t) + \frac{1}{2\gamma^5(t)} u_{xx}^2(0, t) F(0) = \\ & = -(HG, u)(t), \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

мұндағы $G(x)$ функциясы келесі түрде таңдалған $G(x) = 1 + 4x - x^3 - \frac{1}{60} x^5$. Енді

(3.1.36)-теңдеудегі $-\frac{1}{3\gamma(t)} (G', u^3)(t)$ мүшесіне (3.1.35) бағалауын қолдану нәтижесінде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3\gamma(t)} (G', u^3)(t) & \geq -\frac{1}{3\gamma(t)} \|u_x\|^2(t) (G', |u|)(t) \geq \\ & \geq -\frac{1}{3\gamma(t)} \sup_{x \in (0,1)} G' \|u\|(t) (G', u_x^2)(t) \geq \\ & \geq -\frac{4}{3\gamma(t)} A_0 \left(\|u_0\| + \int_0^t \|H(\tau)\| d\tau \right) (G', u_x^2)(t), \end{aligned}$$

теңсіздігіне ие боламыз, мұндағы $A_0 = \sup_{t>0} \exp \left\{ \int_0^t \sup_{x \in (0,1)} \left| P - \frac{1}{2} R_x \right| (\tau) d\tau \right\}$. Соңғы бағалауды қолданып, (3.1.26)-теңдігінен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (G, u^2)(t) + \left(\frac{1}{2\gamma^3(t)} + \frac{5}{\gamma^5(t)} \right) \|u\|^2(t) + \\ & + \frac{5}{2\gamma^5(t)} \|u_x\|^2(t) + \frac{5}{2\gamma^5(t)} (G', u_{xx}^2)(t) + \\ & + \frac{1}{\gamma^3(t)} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \frac{1}{\gamma^2(t)} A_0 \left(\|u_0\| + \int_0^t \|H\|(\tau) d\tau \right) \right) (G', u_x^2)(t) \leq \\ & \leq \left(\left(P - \frac{1}{2} R_x \right) G - \frac{1}{2} R G' \right), u^2(t) + |(HG, u)(t)|. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

орынды болатындығына көз жеткіземіз. Теорема 3.2-дегі $\delta > 0$ -дің мәнін жеткілікті кіші етіп таңдап, келесі бағалауды алуға болады

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \frac{1}{\gamma^2(t)} A_0 \left(\|u_0\| + \int_0^t \|H\|(\tau) d\tau \right) \geq \frac{1}{2}. \quad (3.1.38)$$

Енді Пуанкаре теңсіздігі негізінде

$$(G', u_x^2)(t) \geq \|u_x^2\|(t) \geq \|u^2\|(t) > \frac{1}{4} (G, u^2)(t), \quad (3.1.39)$$

$$(G', u_{xx}^2)(t) \geq \|u_{xx}^2\|(t) \geq \|u_x^2\|(t) > \frac{1}{4} (G, u^2)(t)$$

бағалауларын аламыз. Осы (3.1.38) және (3.1.39) бағалауларын қолданып, (3.1.37) теңсіздігін келесі түрде өрнектеуге болады

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (G, u^2)(t) + \left(\frac{1}{4\gamma^3(t)} + \frac{5}{2\gamma^5(t)} \right) (G, u^2)(t) \leq \\ & \leq \sup_{x \in (0,1)} \left| \left(P - \frac{1}{2} R_x \right) - \frac{1}{2} R \frac{G'}{G} \right| (G, u^2)(t) + |(HG, u)(t)|. \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Енді норманы $(G, u^2)(t) = \|G^{1/2}u\|^2(t)$ деп белгілеп, әрі $1 \leq G(x) < 4$ теңсіздігін қолдансақ, соңғы теңсіздікті келесі түрде аламыз

$$\frac{d}{dt} \|G^{1/2}u\|(t) + \left(\frac{1}{4\gamma^3(t)} + \frac{5}{2\gamma^5(t)} \right) \|G^{1/2}u\|(t) \leq B(t) \|G^{1/2}u\|(t) + 2\|H\|(t), \quad (3.1.41)$$

мұндағы $B(t) = \sup_{x \in (0,1)} \left| \left(P - \frac{1}{2} R_x \right) - \frac{1}{2} R \frac{G'}{G} \right|$. Ыңғайлылық үшін $\|G^{1/2}u\|^2(t) = y(t)$ деп белгілесек, (3.1.41)-теңсіздігі төмендегі қарапайым түрге келеді

$$\frac{d}{dt} y(t) + k_0 y(t) \leq M(t), \quad (3.1.42)$$

мұндағы $k_0 = \frac{1}{4\gamma^3(t)} + \frac{5}{2\gamma^5(t)} > 0$ және $M(t) = 4B(t)A_0(\|u_0\| + \int_0^\infty \|H\|(\tau)d\tau) + 2\|H\|(t)$.

Енді (3.1.42) теңсіздігін $e^{k_0 t}$ -ға көбейтіп,

$$y(t) \leq e^{-k_0 t} (y(0) + \int_0^t e^{k_0 \tau} M(\tau) d\tau),$$

және 3.7-лемманы ескерсек келесі бағалауды аламыз

$$\int_0^t e^{k_0 \tau} M(\tau) d\tau \leq M_0 e^{\delta t}, \quad \delta < k_0,$$

мұндағы M_0 шамасы 2-ші теоремадағы Φ_0 шамасымен пропорционал. Сондықтан,

$$y(t) \leq e^{-(k_0 - \delta)t} (y(0) + M_0).$$

Бұл біз қарастырып отырған (3.1.1–3.1.3)-есептің шешімінің L^2 -нормасы бойынша экспоненциалды түрде азаятынын дәлелдейді, яғни есептің шешімі тұрақты екенін көрсетеді.

Сонымен (3.1.1-3.1.3) есебінің глобалды шешімінің бар, жалғыз екенін және шешімнің L^2 -нормасы бойынша экспоненциалды түрде азаятынын дәлелдедік. Демек, біз 3.2 теоремасын толығымен дәлелдедік.

3.2 Шекарасы жылжымалы облыстағы Кавахара теңдеуінің сандық шешімдері

Бұл бөлімде кеңістіктік дискретизация үшін Галеркин әдісі негізіндегі ақырлы элементтер әдісі қолданылады. Уақыт бойынша пайда болатын жүйені шешу үшін ақырлы айырымдар әдісі пайдаланылады. Көрсетілген мақсатқа жетуде Зиенкевич және т.б. [58], Хьюз [59], Чжипин және басқалар [60], сондай-ақ Ринкон мен Лю [61] жұмыстарында ұсынылған әдістерге негізделген алгоритм құрастырылды.

Енді, (3.1.1)-(3.1.3) есебінің жуық шешімін табу мақсатында, (3.1.1)-(3.1.3) есебінің дербес жағдайы болатын біртекті шекаралық шарттармен есеп қарастырылады. Шекарасы

$$D_\tau = \{\xi \in R \mid \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), \tau > 0\},$$

болатын жылжымалы шекаралы

$$Q_\tau = \{(\xi, \tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0, T), T > 0\}$$

облысында классикалық Кавахара теңдеуін

$$\mathcal{G}_\tau + \mathcal{G}_\xi + \mathcal{G}_{\xi\xi\xi} - \mathcal{G}_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.2.1)$$

келесі бастапқы және біртекті шекаралық шарттармен

$$\mathcal{G}(\xi, 0) = \mathcal{G}_0(\xi), \quad \xi \in D_0, \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\alpha(\tau), \tau) &= \mathcal{G}(\beta(\tau), \tau) = 0, \\ \mathcal{G}_\tau(\alpha(\tau), \tau) &= \mathcal{G}_\tau(\beta(\tau), \tau) = \mathcal{G}_{\tau\tau}(\beta(\tau), \tau) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

қарастырайық, мұндағы $\alpha(\tau), \beta(\tau) \in C^2(0, T)$ және

$$0 < \alpha_0 \leq \beta(\tau) - \alpha(\tau) \leq \beta_0 < \infty, \quad \alpha'(\tau) \leq 0, \beta'(\tau) \geq 0, \quad \forall \tau \geq 0.$$

3.1 бөлімдегі тәсілге ұқсас түрде (3.2.1)-(3.2.3) есебін $\Gamma: Q_\tau \rightarrow Q$ түрлендіруін қолданып Q_τ облысын цилиндрлік облыс $Q = \{x \in (0, 1), t \in (0, T)\}$ түріне келесі алмастыруды қолданып келтіреміз

$$x = \frac{\xi - \alpha(t)}{\gamma(t)}, \quad t = \tau, \quad \gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t), \quad \mathcal{G}(\xi, \tau) = u(x, t).$$

Бұл алмастыру нәтижесінде (3.2.1-3.2.3) есебі келесі есепке ауысады

$$\begin{cases} u_t - a(x, t)u_x + b_1(t)uu_x + b_2(t)u_{xxx} - b_3(t)u_{xxxx} = 0, & (x, t) \in Q, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.2.4)$$

мұндағы

$$a(x,t) = \frac{\alpha'(t) + x\gamma'(t)}{\gamma(t)}, \quad b_1(t) = \frac{1}{\gamma(t)}, \quad b_2(t) = \frac{1}{\gamma^3(t)}, \quad b_3(t) = \frac{1}{\gamma^5(t)}.$$

Енді (3.2.4) жүйесінің бірінші теңдеуін $\omega(x) \in H_0^2(0,1)$ функциясына көбейтіп $(0,1)$ аралығында x айнымалысы бойынша интегралдасак, келесі вариациялық формуланы аламыз

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \omega dx - \int_0^1 a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \omega dx + b_1(t) \int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial x} \omega dx + b_2(t) \int_0^1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \omega dx - \\ - b_3(t) \int_0^1 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \omega dx = 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

3.2.1 Галеркин әдісі негізіндегі жуық шешім

Галеркин әдісін қолдану үшін кеңістікті анықтайық. Ол үшін $V \subset H_0^2(Q)$ кеңістігінің V_m – ішкі кеңістігін қарастырайық. Бұл кеңістік $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \dots\}$ базистік функциялары арқылы құрылған, яғни

$$V_m = \text{span}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}.$$

Егер $u^h(x,t) \in V_m$ функциясын қарастырсақ, онда оны аталған базис бойынша мынадай түрде жіктеуге болады

$$u^h(x,t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m. \quad (3.2.6)$$

Енді (3.2.5) теңдеуін V_m – ішкі кеңістігінде қарастырайық. Ол үшін (3.2.6) жіктелуін теңдеуге қойып, $\omega = \varphi_j(x)$, $j=1, \dots, m$ деп алып, бөліктеп интегралдау арқылы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m d_i'(t) \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx + b_1(t) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d_i(t) d_k(t) \int_0^1 \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_j dx \\ - \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 a(x,t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j dx - b_2(t) \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \varphi_j dx \\ - b_3(t) \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

теңдеулер жүйесін аламыз. (3.2.7) теңдеуінің әрбір мүшесін матрицалар және үшінші ретті тензор түрінде анықтайық

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx, \quad B_{ij}(t) = \int_0^1 a(x,t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j dx, \quad C_{ikj} = \int_0^1 \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_j dx,$$

$$D_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx, \quad E_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} dx,$$

мұндағы C_{ikj} – үшінші ретті тензор, ал қалғандары $m \times m$ өлшемді матрицалар. (3.2.5) теңдеуін аталған матрицалар және үшінші ретті тензор арқылы қайта жазсақ, келесі матрицалық түрдегі қарапайым бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{cases} Ad'(t) + G(t)d(t) + b_1(t)Cd^2(t) = 0, \\ d(0) = d_0, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

мұндағы $d(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t)]^T$ белгісіз вектор-функциясы, ал $G(t) = -B(t) - b_2(t)D - b_3(t)E$.

3.2.2 Уақыт бойынша дискретизация

Матрицалық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі (3.2.8) коэффициенттердің уақытқа тәуелділігіне байланысты аналитикалық түрде шешілуі қиындай түседі. Сондықтан (3.2.8) теңдеуін жуықтап шешу үшін уақыт бойынша Кранк-Николсон ақырлы-айырым әдісін [59] қолданамыз.

Функцияны уақыт бойынша дискретизациялау үшін $[0, T]$ аралығында уақыт торын анықтайық

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Осылайша, (3.2.8) теңдеуіндегі $d(t)$ -векторының t_n уақыт мезетіндегі мәнін $d^n = d(t_n)$ түрінде белгілейміз.

Кранк-Николсон әдісін қолданар алдында, C_{ikj} тензорын сызықты түрге келтіріп аламыз. Осыдан кейін (3.2.8) теңдеулер жүйесін шешеміз, яғни бейсызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесін жуықталған сызықтық теңдеулер жүйесіне айналдырамыз.

C_{ikj} тензорын сызықты түрге келтіру үшін $C_{ij}(t) = (C_{ikj}d_k(t))$ матрицаларын енгізейік, әрбір $k = 1, \dots, m$ үшін барлық матрицаның өлшемі $m \times m$. Осылайша, (3.2.7) теңдеуіндегі тензорды келесі түрде аламыз

$$C_{ikj}d^2(t) = (C_{ikj}d_k(t))d_i(t) = C_{ij}(t)d_i(t).$$

Ал t_n уақыт мезетінде дискреттеу нәтижесінде жуықтау мына түрде алынады

$$d_i'(t_n) = \frac{1}{\Delta t} (d_i^{n+1} - d_i^n) \text{ және } d_i(t_n) = \frac{1}{2} (d_i^{n+1} + d_i^n). \quad (3.2.9)$$

Осы ақырлы-айырым схемасына барлық $j = 1, \dots, m$ үшін

$$A_{ij} \left(\frac{d_i^{n+1} - d_i^n}{\Delta t} \right) + (G_{ij}^n + b_1 C_{ij}^n) \left(\frac{d_i^{n+1} + d_i^n}{2} \right) = 0, \quad (3.2.10)$$

ие боламыз. Осылайша (3.2.10) айырым схемасынан барлық $n = 0, 1, 2, \dots$, үшін біз келесі итерациялық схеманы аламыз

$$(A_{ij} + \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^n) d_i^{n+1} = (A_{ij} - \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^n) d_i^n, \quad (3.2.11)$$

мұндағы $J_{ij}^n = G_{ij}^n + b_1(t) C_{ij}^n$.

3.2.3 В-сплайндармен жуықтау

(3.2.10) сызықты жүйенің матрицаларын есептеу үшін $\varphi_i(x) \in V_m$ базистік функциясын енгізуіміз қажет. Ақырлы элементтер әдісінде базистік функциялар Q аймағында белгілі бір дәрежедегі бөлік-көпмүшеліктер болып табылады және ∂Q шекарасында нөлге тең болады. Нақтырақ айтқанда, (3.2.7)-де анықталған E_{ij} матрицасына байланысты біз V_m кеңістігінің базис функциясы ретінде төртінші ретті В-сплайндарды қолдандық. Төртінші ретті В-сплайндарды келесі түрде анықтаймыз

$$B_i(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{i-2})^4, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4 + 10(x - x_i)^4, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x - x_{i+3})^4 - 5(x - x_{i+2})^4, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x - x_{i+3})^4, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ 0, & x \notin (x_{i-2}, x_{i+3}), \end{cases}$$

мұндағы түйін нүктелер біркелкі орналастырылған, олардың ара қашықтығы $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, m$, $x_1 = 0$ және $x_m = 1$. В-сплайн $B_1(x), \dots, B_m(x)$ функциялары базистік функциялар $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ түрінде тандаймыз. Алайда $B_1(x), B_2(x), B_{m-2}(x), B_{m-1}(x), B_m(x)$ функциялары шекаралық шарттарды қанағаттандырмағандықтан біз базистік функцияларды келесі түрде таңдаймыз

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = B_i(x), i = 3, \dots, m-3, \\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi_{m-2}(x) = \varphi_{m-1}(x) = \varphi_m(x) = 0. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Осы $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ базистік функцияларын пайдалана отырып, (3.2.7) теңдеуінің барлық матрицаларын есептеуге болады. Осылайша (3.2.10) сызықтық жүйесін шешуге болады. Егер $|i - j| > 4$ болса, онда $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0$. Сонымен қатар, барлық дискретті уақыт $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$ үшін барлық матрицалар сингулярлы емес екенін байқауға болады. (3.2.6) бойынша шешім

$$u^h(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m$$

екені белгілі. Мұндағы $d^0 = (d_1^0, \dots, d_m^0)$ бастапқы шарт болып табылады. Енді (3.2.11) теңдеуін $n = 0$ үшін есептесек

$$(A_{ij} + \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^0) d_i^1 = (A_{ij} - \frac{\Delta t}{2} J_{ij}^0) d_i^0, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (3.2.13)$$

сызықты теңдеулер жүйесін аламыз. (3.2.13) сызықты жүйені шешу арқылы $d^1 = (d_1^1, \dots, d_m^1)$ векторын табамыз. Содан кейін, $n = 1, \dots, N$ үшін дәл осылай барлық $t_n = n\Delta t$ уақытта $d^n = (d_1^n, \dots, d_m^n)$ шамалары итерациялық әдіспен анықталады.

3.2.4 Сандық шешім

Бұл бөлімнің негізгі мақсаты – жуық шешімді сандық түрде жүзеге асыру және сандық моделдеу арқылы теориялық талдауымыздың дұрыстығын тексеру. Барлық есептеулер MATLAB және Python бағдарламаларының көмегімен орындалды.

(3.2.1) бастапқы есепте $f(\xi, \tau)$ сыртқы күштің бар екенін болжап, оны шешу үшін қолданылатын алгоритмнің сапасын тексерейік. Бұл жағдайда (3.2.4) есептің дәл шешімі белгілі, сондықтан біз оны қолданылатын сандық әдіспен алынған жуықталған шешіммен салыстыра аламыз. Сонымен қатар, (3.2.1) есеп үшін сәйкес сыртқы күш $f(\xi, \tau)$, Γ түрлендіруін пайдаланып $g(x, t)$ арқылы белгілейміз.

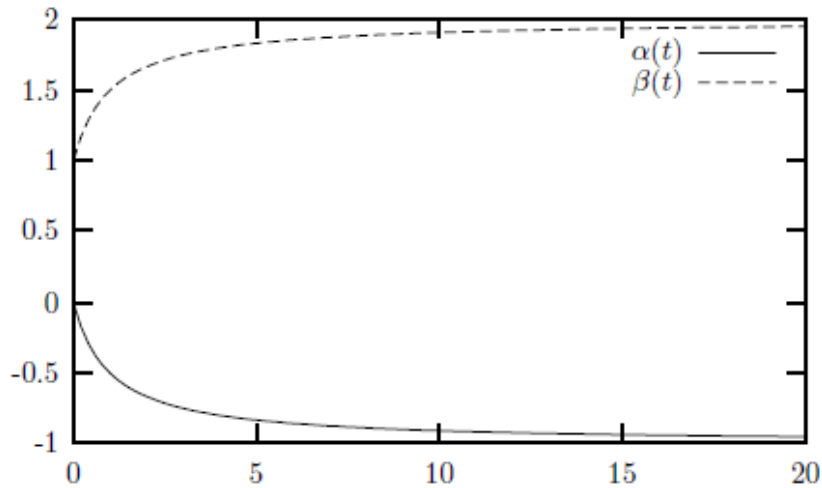
Біртекті келесі жүйені қарастырайық

$$\begin{cases} u_t - a(x, t)u_x + b_1(t)uu_x + b_2(t)u_{xxx} - b_3(t)u_{xxxx} = g(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.2.14)$$

егер $g(x, t) = 0$, болса (3.2.4) есебіне келеміз.

1-мысал. Бұл мысалда (3.2.14) теңдеуін шешу үшін қажетті шекаралық функциялар, сыртқы күш функциясы және бастапқы шарт қарастырылады. Алдымен Q_τ облысының шекаралық функциялары $\alpha(t)$ және $\beta(t)$ келесі түрде аламыз

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \text{ және } \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1} \text{ онда } \gamma(t) = \frac{3t+1}{t+1}. \quad (3.2.15)$$



3.2.1 сурет. Шекаралық функциялардың қозғалысы.

Осыдан $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \rightarrow -1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) \rightarrow 2$ және $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) \rightarrow 3$. Ал бастапқы функциясы $u_0(x) = x^3(x-1)^3$ және $g(x, t)$ сыртқы күш функциясы келесі түрде берілсін

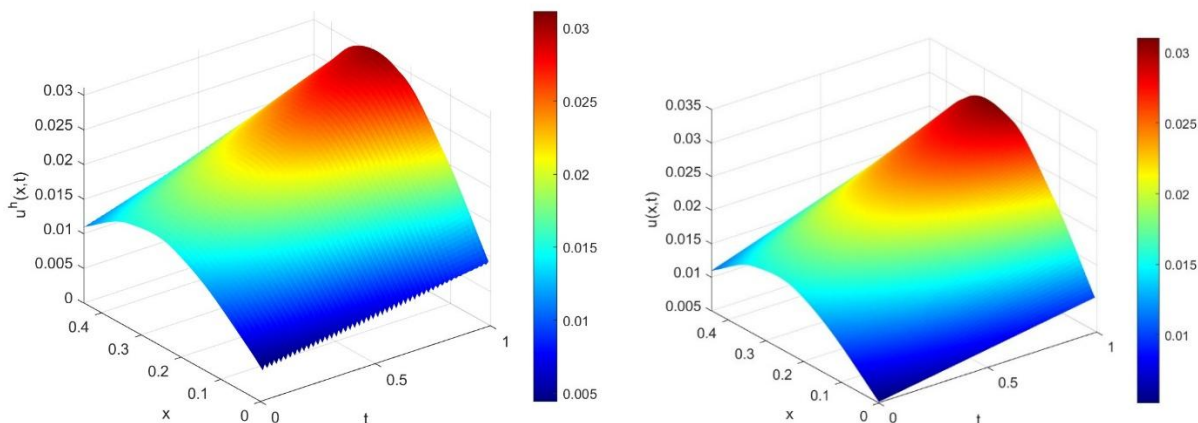
$$\begin{aligned} g(x, t) = & x^3(1-x)^3 - \left(\frac{\alpha'(t) + \gamma(t)x}{\gamma(t)} \right) (3x^2(x-1)^3 + 3x^3(x-1)^2)(t+1) + \\ & + \frac{1}{\gamma(t)} x^3(1-x)^3 (3x^2(x-1)^3 + 3x^3(x-1)^2)(t+1)^2 + \\ & + \frac{1}{\gamma^3(t)} (114x^3 - 162x^2 + 54x + 6(x-1)^3)(t+1) - \\ & - \frac{1}{\gamma^5(t)} (720x - 360)(t+1). \end{aligned}$$

Осы функцияларды қолданып, (3.2.14) есептің айқын шешімі:

$$u(x, t) = x^3(x-1)^3(t+1). \quad (3.2.16)$$

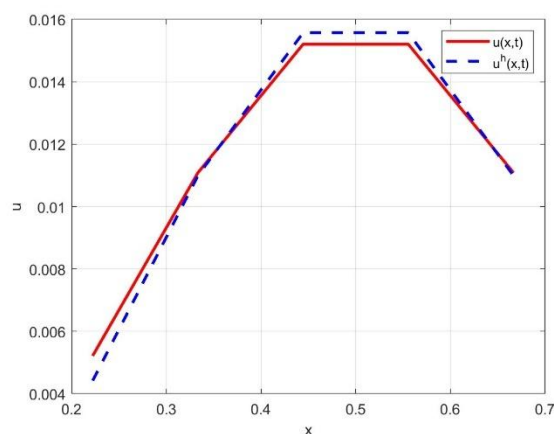
Келесі моделдеулерде сандық шешімнің нәтижелері айқын шешіммен салыстырылады.

1-ші моделдеу. Бұл моделдеуде кеңістіктік дискретизация үшін $m=10$ түйін таңдалып, уақыт қадамы $\Delta = 0.01$ ретінде алынған ($N = 100$).

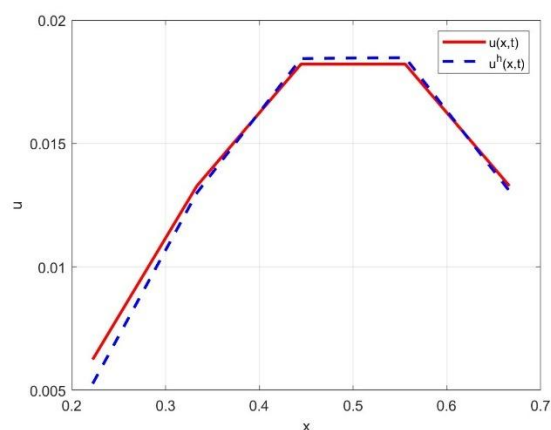


3.2.2 сурет. $m=10$ және $\Delta = 0.01$ параметрлері үшін алынған жуықталған $u^h(x,t)$ және айқын $u(x,t)$ шешімдері.

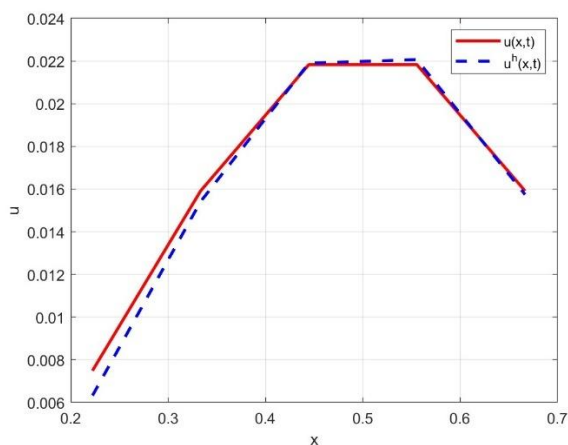
1-ші моделдеу нәтижесінде алынған қателік шамамен 10^{-4} реттілігінде болды. 3.2.2-суретте көрсетілгендей, тіркелген қателіктің ең үлкен мәні 0.0005801 болды. Келесі суреттерде $m=10$ және $\Delta = 0.01$ параметрлері үшін $u(x,t)$ айқын шешімі мен $u^h(x,t)$ жуықталған шешімінің белгілі бір уақыттағы графиктері көрсетілген



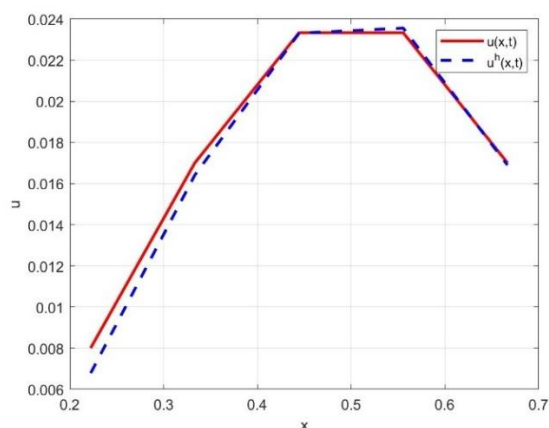
3.2.3 сурет. $t = 0.01$.



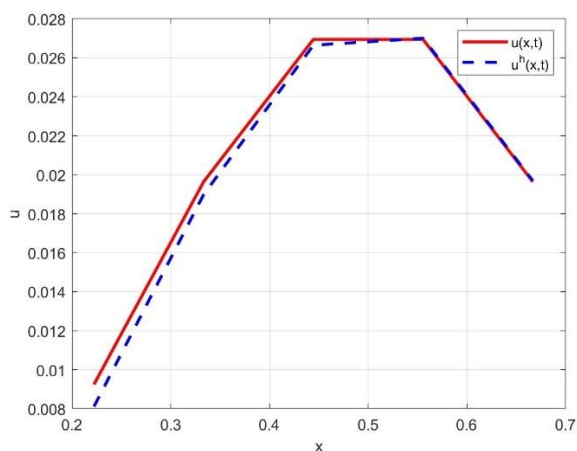
3.2.4 сурет. $t = 0.21$.



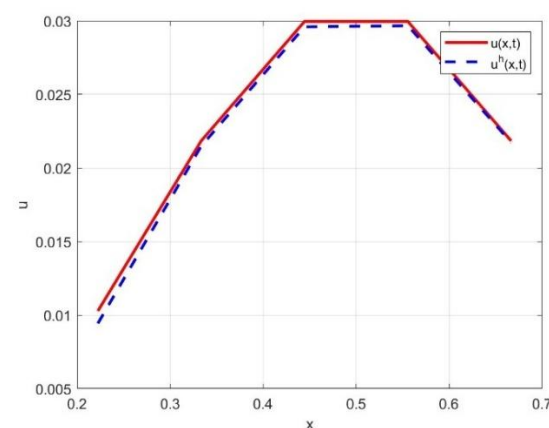
3.2.5 сурет. $t = 0.45$.



3.2.6 сурет. $t = 0.55$.

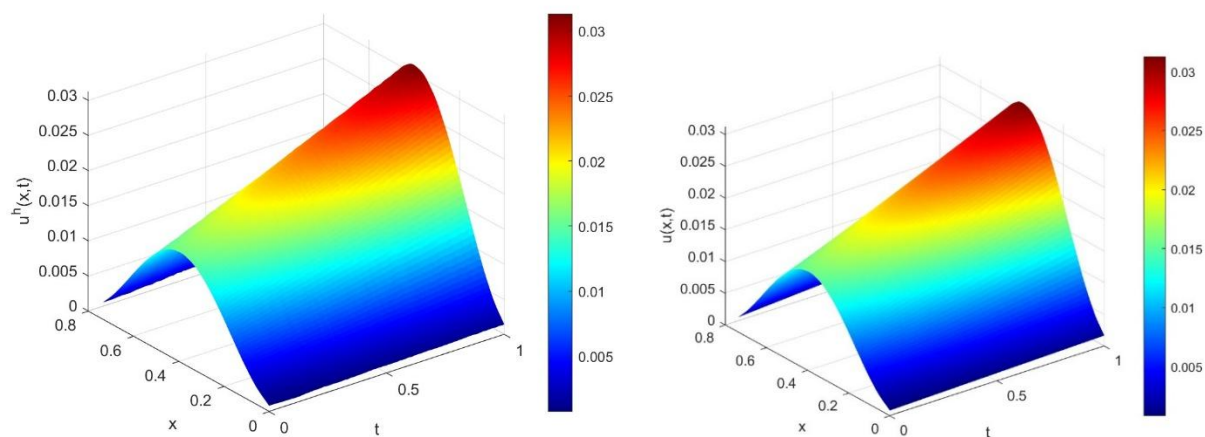


3.2.7 сурет. $t = 0.79$.



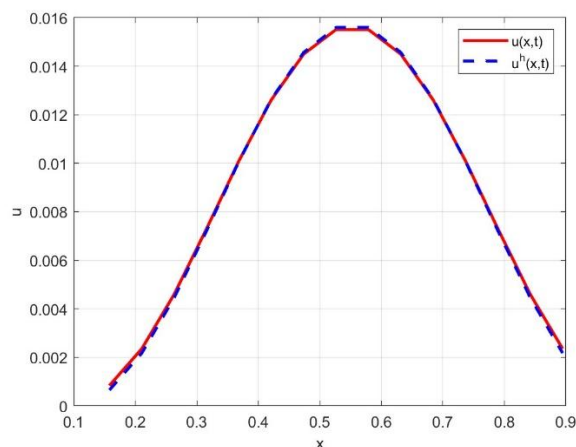
3.2.8 сурет. $t = 0.99$.

2-ші моделдеу. Бұл моделдеуде кеңістіктік дискретизация үшін $m = 20$ түйін таңдалып, уақыт қадамы $\Delta = 0.001$ ретінде алынған ($N = 1000$).

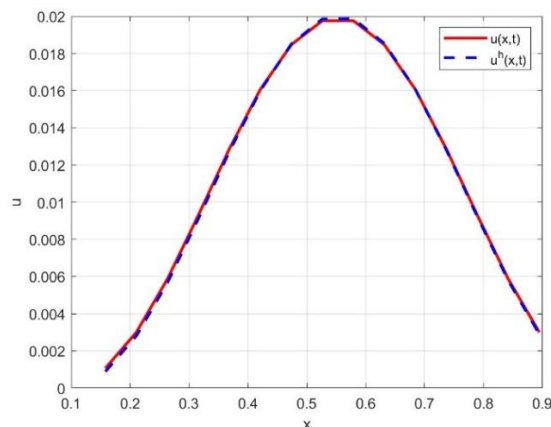


3.2.9 сурет. $m = 20$ және $\Delta = 0.001$ параметрлері үшін алынған жуықталған $u^h(x,t)$ және айқын $u(x,t)$ шешімдері.

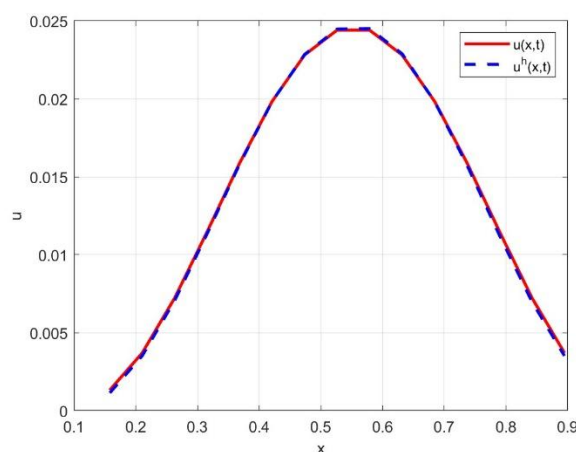
Осы моделдеу нәтижесінде алынған қателік шамамен 10^{-4} реттілігінде болды. 3.2.9-суретте көрсетілгендей, тіркелген қателіктің ең үлкен мәні 0.0001242 болды. Келесі суреттерде $m=20$ және $\Delta=0.001$ параметрлері үшін $u(x,t)$ айқын шешімі мен $u^h(x,t)$ жуықталған шешімінің белгілі бір уақыттағы графиктері көрсетілген



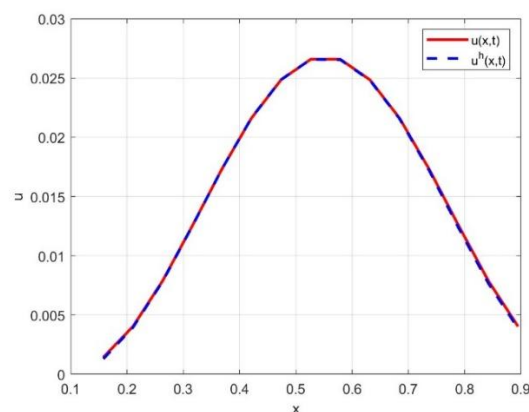
3.2.10 сурет. $t = 0.001$.



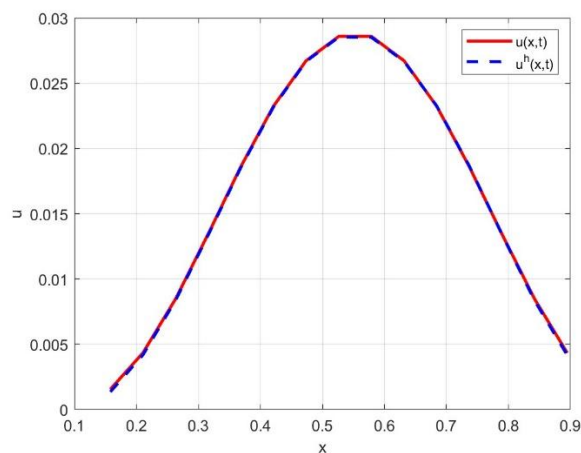
3.2.11 сурет. $t = 0.275$.



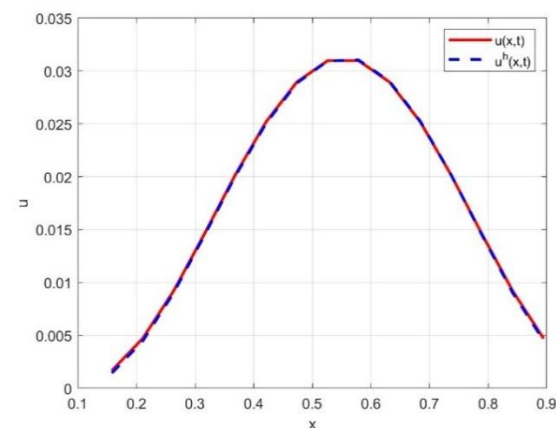
3.2.12 сурет. $t = 0.475$.



3.2.13 сурет. $t = 0.715$.

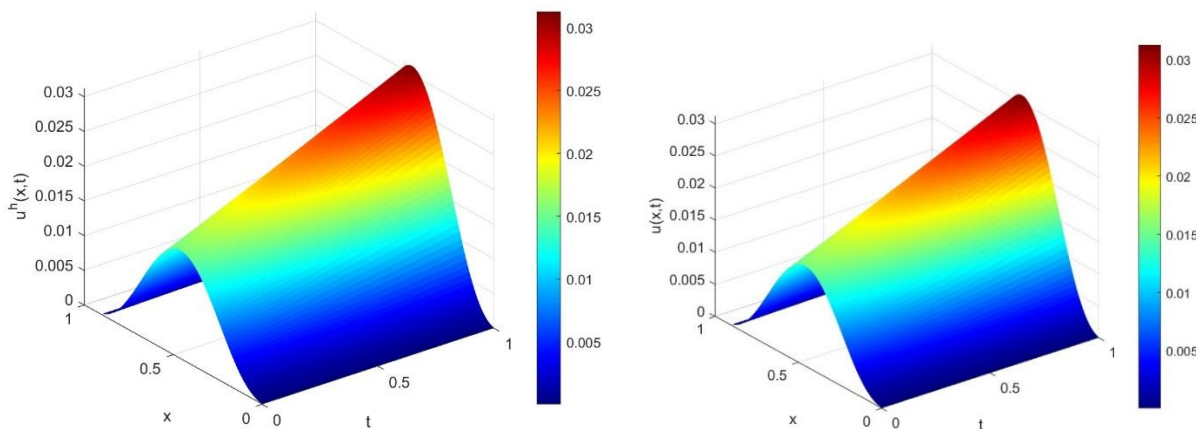


3.2.14 сурет. $t = 0.845$.



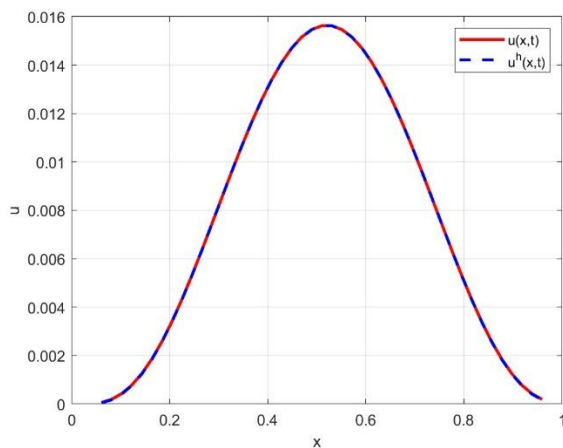
3.2.15 сурет. $t = 0.999$.

3-ші моделдеу. Ал 3-ші моделдеуде кеңістіктік дискретизация үшін $m = 50$ түйін таңдалып, уақыт қадамы $\Delta = 0.001$ ретінде алынған ($N = 1000$).

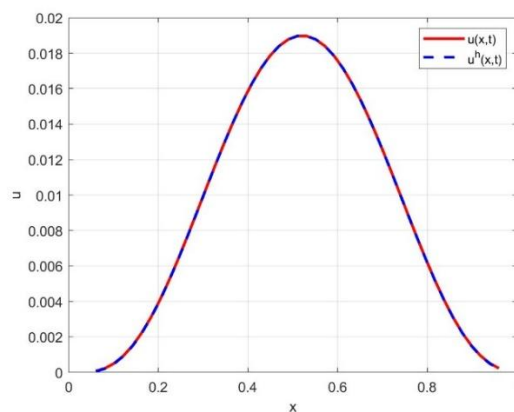


3.2.16 сурет. $m = 50$ және $\Delta = 0.001$ параметрлері үшін алынған жуықталған $u^h(x,t)$ және айқын $u(x,t)$ шешімдері.

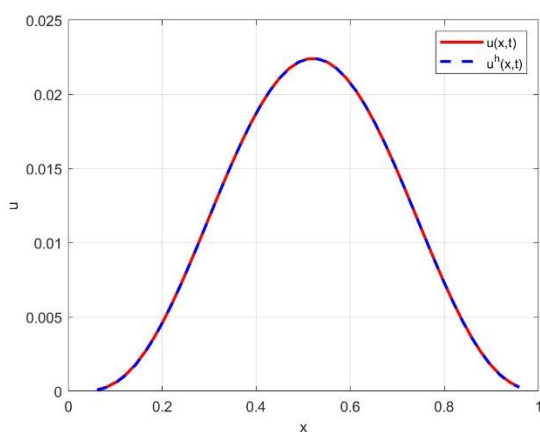
Ал келесі суреттерде $m = 50$ және $\Delta = 0.001$ параметрлері үшін $u(x,t)$ айқын шешімі мен $u^h(x,t)$ жуықталған шешімінің белгілі бір уақыттағы графиктері көрсетілген



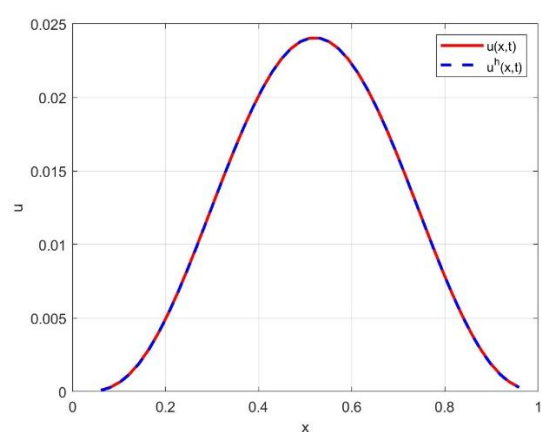
3.2.17 сурет. $t = 0.001$.



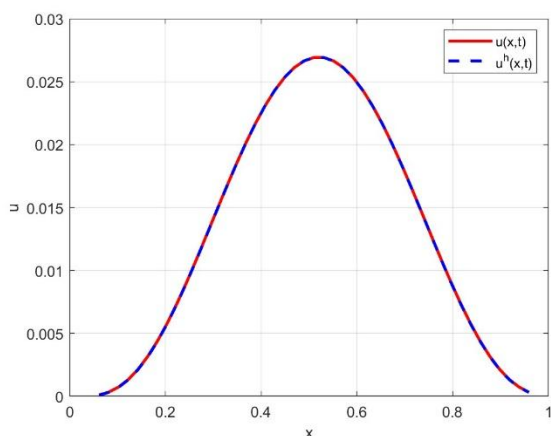
3.2.18 сурет. $t = 0.215$.



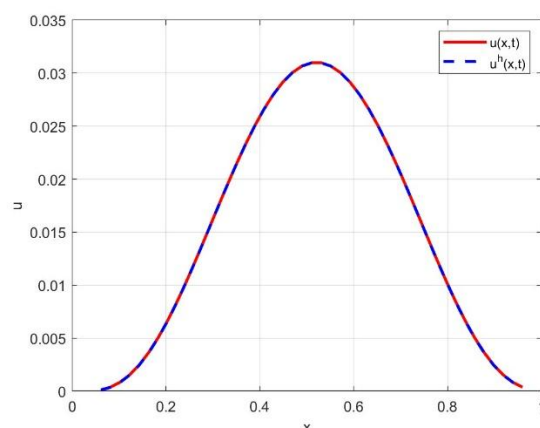
3.2.19 сурет. $t = 0.435$.



3.2.20 сурет. $t = 0.54$.



3.2.21 сурет. $t = 0.725$.



3.2.22 сурет. $t = 0.985$.

Сонымен $L^\infty(L^2(0,1);(0,T))$ кеңістігіндегі нормадасында жуықталған шешім мен айқын шешімнің айырымының қателігі келесі формуламен есептелінеді [62]:

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} = \max_{t_n \in [0,T]} \left(\int_0^1 |u(x_i, t_n) - u_h(x_i, t_n)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

1 -кесте

Δt	m	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$
0.01	10	$5.801 \cdot 10^{-4}$
0.01	20	$1.555 \cdot 10^{-4}$
0.01	50	$9.709 \cdot 10^{-5}$
0.01	100	$8.055 \cdot 10^{-5}$

2 -кесте

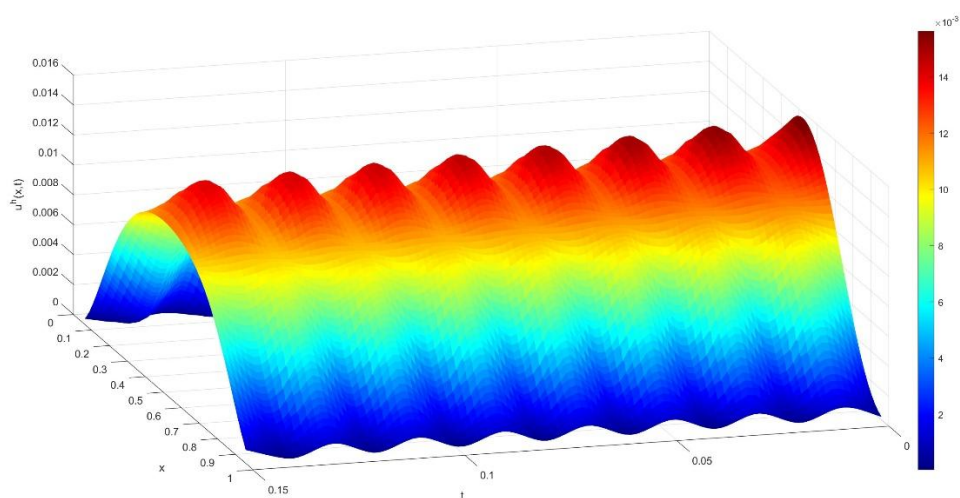
Δt	m	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$
0.001	10	$5.348 \cdot 10^{-4}$
0.001	20	$1.242 \cdot 10^{-4}$
0.001	50	$1.876 \cdot 10^{-5}$
0.001	100	$1.442 \cdot 10^{-6}$

Бұл моделдеу нәтижелерінен байқайтынымыз – тордың қадамы m мен уақыт қадамы N ұлғайған сайын айқын шешім мен сандық шешімнің бір біріне жақындай түседі. Бұл тұжырымды нақтылау үшін 1-ші және 2-ші кестелерде

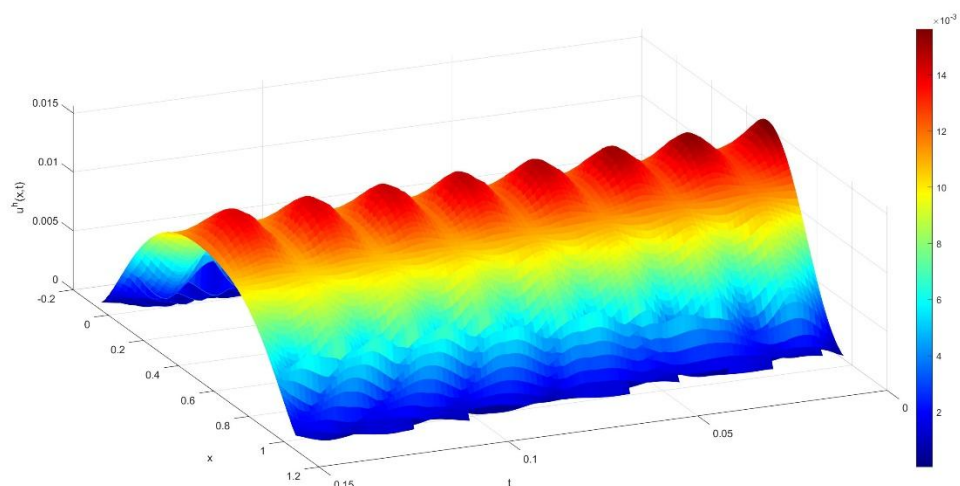
$u_h(x,t)$ жуықталған шешім мен $u(x,t)$ айқын шешімнің арасындағы айырмашылықтың қателігі көрсетілген.

Сонымен, сыртқы күш $g(x,t)$ функциясын немесе $f(\xi,\tau)$ функциясын нөлге тең болғанда бастапқы (3.2.1-3.2.3) есебінің сандық шешімін есептеу үшін дәл осы тәсілді қолдануға болады.

Ұсынылған әдісті қолдана отырып, 2.3.17 суретте сыртқы күш $g(x,t)=0$ болған жағдайы үшін (3.2.14) шекаралық шарты мен $u_0(x)=x^3(1-x)^3$ бастапқы функциясына сәйкес (2.3.4) есебінің $u^h(x,t)$ жуық шешімі алынды. Ал 2.3.18 суретте Γ -түрлендіруі негізінде (3.2.1–3.2.3) есебінің $\vartheta^h(\xi,\tau)$ жуық шешімі табылды.



3.2.23 сурет. (3.2.4) есебінің $u^h(x,t)$ жуық шешімі.



3.2.24 сурет. (3.2.1-3.2.3) есебінің $\vartheta^h(\xi,\tau)$ жуық шешімі.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста, таяз суда толқындардың сыну моделін және шекарасы жылжымалы облыстағы Кортевег-де Фриз, Кавахара теңдеулеріне негізделген су толқынының моделдерін зерттеу барысында, келесі негізгі нәтижелер алынды:

Бірінші тарауда таяз суда толқындардың сынуын модельдеу мәселесі қарастырылды. Жүйенің ерекшеленген нүктелері сипатталды, сондай-ақ жылжымалы толқын түріндегі аналитикалық және сандық шешімдердің бар екені көрсетілді. Зерттеу нәтижелері шешімнің қасиеттері Рейнольдс санына тәуелді екенін көрсетті. Атап айтқанда, Рейнольдс саны үлкен болғанда, шешім тербелмелі сипатқа ие болады, бұл жағдайда диссипация аз болады. Ал Рейнольдс саны кіші болғанда, шешім монотонды болады, бұл жоғары диссипация жағдайына сәйкес келеді. Сонымен қатар, сыни Рейнольдс саны $Re = Re_c \approx 0.71$ анықталды, ол монотонды профилден тербелмелі профилге ауысу шегіне сәйкес келеді. Бұл шекті мән толқынның тұрақтылық қасиеттерін зерттеуде маңызды рөл атқарады. Алынған нәтижелер толқындардың таралуын сипаттайтын математикалық моделдерді жетілдіруге және оларды табиғи жағдайларда толқын динамикасын болжау үшін қолдануға негіз бола алады.

Екінші тарауда шекарасы жылжымалы облыста Кортевег-де Фриз теңдеуіне негізделген су толқынының моделі қарастырылды. Осы моделдің жуық шешімінің бар екені мен жалғыздығы дәлелденді және сандық шешімі анықталды.

Үшінші тарау шекарасы жылжымалы облыстағы су толқындарын жоғары дәлдікпен сипаттайтын Кавахара теңдеуіне негізделген күрделірек моделді зерттеуге арналды. Бұл моделдің глобал шешімнің бар екендігі және оның жалғыздығы дәлелденіп, тиісті теоремалармен негізделді. Теориялық талдаудан кейін моделдің сандық шешімі анықталды.

Екінші және үшінші тарауда сандық әдіс ретінде — В-сплайн негізінде ақырлы айырым әдісі мен уақыт бойынша Кранк-Николсон әдісі қолданылып, тұрақты түрде қадамдап алу алгоритмі әзірленді. Сандық тәжірибе нәтижелері теориялық болжамдарды растап, жуық шешімнің жинақтылығы мен тұрақтылығы дәлелденді. Алынған есептеу формулалары мен алгоритмдер шынайы физикалық параметрлермен моделдеуге жарамды. Осы моделдердің сандық шешімдері алынды.

Жалпы алғанда, алынған нәтижелер мен әзірленген есептеу алгоритмдері толқындардың таралуын сипаттайтын математикалық моделдерді дамытуға мүмкіндік береді және оларды нақты физикалық параметрлермен қолданып, табиғи ортадағы толқын динамикасын болжау үшін пайдалануға болады.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Kazakova M., Richard G.L. A new model of shoaling and breaking waves: Onedimensional solitary wave on a mild sloping beach //Journal of Fluid Mechanics, - 2019. - Vol. 862, - P. 552-591. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.947>
- 2 Richard G.L., Duran A., Fabr`eges B. A new model of shoaling and breaking waves: Part 2. Run-up and two-dimensional waves //Journal of Fluid Mechanics, - 2019. - Vol. 867, - P. 146-194. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.125>
- 3 Salmon R. Lectures on Geophysical Fluid Mechanics. - Oxford University Press, 1998. - P. 373. DOI: <https://doi.org/10.1093/oso/9780195108088.001.0001>
- 4 Stoker J.J. Water waves: The mathematical theory with applications. - Interscience, - 1957. - P. 609. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118033159.ch11>
- 5 Lannes D. The Water Waves Problem: mathematical analysis and asymptotics. - Mathematical Surveys and Monographs, - 2013. - Vol. 188, - P. 321. DOI: <https://doi.org/10.1090/surv/188>
- 6 Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. - John Wiley and Sons, - 1974. - P. 660. DOI: 10.1002/9781118032954
- 7 Cienfuegos R., Barthelmy E., Bonneton P. Wave-breaking model for Boussinesqtype equations including roller effects in the mass conservation equation //J. Waterway PortCoast. Ocean Eng., - 2010. - Vol. 136, № 1. - P. 10-26. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WW.1943-5460.000002](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WW.1943-5460.000002)
- 8 Freeman J.C., Le Merhauter B. Wave breakers on a beach and surges on a dry bed //J. Hydr. Eng., - 1964. - Vol. 90, № 2. - P. 187-216. DOI: <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0001014>
- 9 Karambas T.V., Tozer N.P. Breaking waves in the surf and swash zone //J.Coastal Res., - 2003. - Vol. 19, № 2. - P. 514-528.
- 10 Hibbert S., Peregrine D.H. Surf and run-up on a beach: a uniform bore //J. Fluid Mech., - 1979. - Vol. 95, № 2. - P. 323-345. DOI: <https://doi.org/10.1017/S002211207900149X>
- 11 Synolakis C.E. Wave Reection and Run-Up on Rough Slopes //Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. - 1989. - Vol. 115, № 4. - P. 139-143. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1989\)115:1\(139.2\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1989)115:1(139.2))
- 12 Packwood A.R., Peregrine D.H. Surf and run-up on beaches: models of viscous effects. - Rep. AM-81 7, University of Bristol. - 1981.
- 13 Richard G.L., Gavriluk S.L. A new model of roll waves: comparison with Brock's experiments //J. Fluid Mech. - 2012. - Vol. 698, - P. 374-405. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.96>
- 14 Richard G.L., Gavriluk S. L. The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows //J. Fluid Mech. - 2013. - Vol. 725, - P. 492-521. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.174>
- 15 Richard G.L., Gavriluk S.L. Modelling turbulence generation in solitary waves on shear shallow water flows //J. Fluid Mech. - 2015. - Vol. 773, - P. 49-74. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.236>

16. Pope S.B. Turbulent Flows. - Cambridge University Press, Cambridge, - 2000. - P. 802. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531>
17. Lilly D.K. The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments //In Proc. IBM Scienti_c Computing Symp. on Environmental Sciences. - 1966. № 281. - P. 195-210. DOI: <https://doi.org/10.5065/D62R3PMM>
18. Higgins C., Parlange M.B., Meneveau C. Energy dissipation in large-eddy simulation: dependence on ow structure and effects of eigenvector lignments //Atmospheric turbulence and mesoscale meteorology. - 2004. - P. 51-69. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511735035.005>
19. Antuono M., Brocchini M. Beyond Boussinesq-type equations: semi-integrated models for coastal dynamics //Physics of Fluids. - 2013. - Vol. 25, № 1. – 016603. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4774343>
20. Teshukov V.M. Gas-dynamics analogy for vortex free-boundary flows //Journal Applied Mechanics and Technical Physics. - 2007. - Vol. 48, № 3, - P. 303-309. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0039-2>
21. Lannes D., Marche F. Nonlinear wave current interactions in shallow water //Stud. Appl. Math. - 2016. - Vol. 136, № 4. - P. 382-423. DOI: <https://doi.org/10.1111/sapm.12110>
22. Musumeci R.E., Svendsen I.A., Veeramony J. The flow in the surf zone: a fully nonlinear Boussinesq-type of approach //Coastal Engineering. - 2005. - Vol. 52, № 7. - P. 565-598. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2005.02.007>
23. Kolmogorov A.N. The equations of turbulent motion in an incompressible fluid //Izvestia Academy of Sciences, Ussr; Physics. - 1942. - Vol. 6, № 1-2, - P. 56-58.
24. Prandtl L. Uber ein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz //Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse. - 1945. - P. 6-19.
25. Koshkarbayev N.M. Travelling breaking waves // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software, 2023, - Vol. 16, № 2, - P. 49-58. DOI: 10.14529/mmp230205
26. Korteweg D.J., de-Vries G. On the change of form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long stationary waves //Philosophical Magazine Series, - 1895 - Vol. 39, № 5, - P. 422-443. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/14786449508620739>
27. Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems //Philos. Trans. Royal Soc. London Ser. A, - 1972. - Vol. 272, № 1220. - P. 47-78. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032>
28. Boccotti P. Wave Mechanics for Ocean Engineering. - Elsevier Sciences, Oxford, 2000. - P. 495.
29. Bogolubsky I. Some examples of inelastic soliton interaction //Computer Physics Communications. - 1977. - Vol. 133, № 2. - P. 149-155. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(77\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0010-4655(77)90009-1)

30. Bona J. L., Smith R. A model for the two-way propagation of water waves in a channel //Math. Proc. Camb. Phil. Soc., - 1976. - Vol. 79, № 1. - P. 167-182. DOI: <https://doi.org/10.1017/S030500410005218X>
31. Chambarel J., Kharif C., Touboul J. Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation //Nonlin. Processes Geophys. - 2009. - Vol. 16, № 1. - P. 111-122. DOI: <https://doi.org/10.5194/npg-16-111-2009>
32. Chan R.K., Street R.L. A computer study of finite-amplitude water wave //J. Comp. Phys. - 1970. - Vol. 6, № 1. - P. 68-94. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(70\)90005-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90005-7)
33. Cooker M.J., Weidman P.D., Bale D.S. Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall //J. Fluid Mech. - 1997. - Vol. 342, - P. 141-158. DOI: <https://doi.org/10.1017/S002211209700551X>
34. Koshkarbayev N., Torebek B.T. Nonexistence of travelling wave solution of the Korteweg-de Vries Benjamin Bona Mahony equation //International Journal of Mathematics and Physics, - 2019. - Vol. 10, № 1. - P. 51-55.
35. Koshkarbayev N., Torebek B.T. About a singular travelling wave solution of the KDV-BBM equation //Вестник КазНУ, - 2019, -Vol. 6, - P. 644-649.
36. Thomée V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. - Springer Series in Computational Mathematics, - 1984. - P. 237.
37. Mat Zin S.B. B-Spline Collocation Approach for solving Partial Differential Equations. - Universiti Sains Malaysia, - 2016. - P. 160.
38. Abd Hamid N.N., Abd. Majid A., Md. Ismail A.I. Extended cubic B-spline interpolation method applied to linear two-point boundary value problems //World Academy of Science, Engineering and Technology, - 2010. - Vol. 38, - P. 566-568.
39. Carl de Boor. A Practical Guide to Splines //Applied Mathematical Sciences. - 1978. - Vol. 34, № 149. - P. 325-326. DOI: <https://doi.org/10.2307/2006241>
40. Prenter P.M. Splines and Variational Methods. - A Wiley-Interscience Publication, - 1975. - P. 323.
41. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, - 1947. - Vol 43. № 1. - P. 50-67. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100023197>
42. Medeiros L.A., Lamaco J., Menezes S.B. Vibrations of elastic strings: mathematical aspects, Part One //Journal of Computational Analysis Applications, - 2002. - Vol. 4, - P. 91-127. DOI: 10.1023/A:1012934900316
43. Medeiros L.A., Lamaco J., Menezes S.B. Vibrations of elastic strings: mathematical aspects, Part Two // Journal of Computational Analysis Applications, - 2002. - Vol. 4. - P. 211–263. DOI: 10.1023/A:1013151525487
44. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media //J. Phys. Soc. Japan, - 1972. - Vol. 33. № 1. - P. 260-264. DOI: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260>
45. Hunter J.K., Scheurle J. Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves //Physica D., - 1988. - Vol. 32. № 2. - P. 253-268. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(88\)90054-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90054-1)

46. Boyd J.P. Weakly non-local solitons for capillary-gravity waves fifth degree Korteweg-de Vries equation //Phys. D., - 1991. - Vol. 48. № 1. - P. 129-146. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90056-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90056-F)
47. Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B. Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation //Physica D., - 1988, - Vol. 31, № 1. - P. 127-134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(88\)90018-8](https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90018-8)
48. Tao S.P., Cui S.B. Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation //Acta Math. Sinica, Engl. Ser., - 2015. - Vol. 21, № 5. - P. 1035-1044.
49. Elwakil S.A., El-Shewy E.K., Abdelwahed H.G. Solution of the perturbed Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation describing electron-acoustic solitary waves in a magnetized plasma //Chin. J. Phys., - 2011, - Vol. 49, № 3. - P. 732-744.
50. Марченко А. В. О длинных волнах в мелкой воде под ледяным покровом. //Прикл. матем. мех, - 1988, - Т. 52, № 2. - С. 230–234.
51. Ильичев А.Т. О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией //Труды МИАН, - 1989, - Т. 186, С. 222–226.
52. Koshkarbayev N. Blowing-up solutions of the shallow water equations //Journal of Nonlinear Modeling and Analysis, - 2025, - Vol. 7, № 4. - P. 1523-1531. DOI:10.12150/jnma.2025.1523.
53. Doronin G.G., Larkin N.A. KdV equation in domains with moving boundaries //Journal of Mathematical Analysis and Applications, - 2007. - Vol. 328, № 1. - P. 503-517. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.05.057>
54. Luc Tartar. An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces. - Springer, - 2007. - P. 219. DOI: [10.1007/978-3-540-71483-5](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71483-5)
55. Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G. Inequalities. 2nd Edition, - Cambridge University Press, Cambridge, - 1952. - P. 324.
56. Sobolev, S.L. On a theorem of functional analysis // Matematicheskii Sbornik, - 1938. - Vol. 4, - P. 471-497. DOI:[10.1090/trans2/034/02](https://doi.org/10.1090/trans2/034/02)
57. Larkin N.A., Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains //J. Math. Anal. Appl., - 2004. - Vol. 297. № 1. - P. 169-185. DOI: [10.1016/j.jmaa.2004.04.053](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.04.053)
58. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 7 ed. - Butterworth-Heinemann, - 2013, - P. 756.
59. Hughes T.J.R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. - Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, - 2000. - P. 704.
60. Zhilin Li, Zhonghua Qiao T.T. Numerical Solution of Differential Equations: Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods. - 1 ed. Cambridge University Press, - 2017. - P. 293. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316678725>
61. Liu I.S., Rincon M. Introducao ao Metodo de Elementos Finitos. - Editora IMUFRJ, Rio de Janeiro, - 2020. - P. 384.

62. Wheeler M.F. A priori L^2 error estimate for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations //SIAM J. Numer. Anal. – 1973. - Vol. 10, № 4. - P. 723–759.